ГЛАВА 7

СВОЙСТВА СВЕРТКИ

Характеристики линейных систем полностью описываются импульсной характеристикой системы, как установлено математикой операции свертки. Это основа большинства методов ЦОС. Например: цифровые фильтры создаются *проектированием* соответствующей импульсной характеристики. Неприятельские самолеты определяются с помощью радара путем *анализа* измеренного импульсного отклика. Подавление эхо-сигналов в протяженных телефонных линиях осуществляется через создание импульсной характеристики, которая *нейтрализует* отраженный сигнал. Список можно продолжить. В этой главе мы подробно рассмотрим свойства и способы использования свертки в различных областях. Во-первых, будут обсуждаться несколько широко известных импульсных характеристик. Во-вторых, будут представлены методы для работы с каскадными и параллельными комбинациями линейных систем. В-третьих, будет рассмотрен метод *корреляции*. В-четвертых, будет исследована неприятная проблема, связанная со сверткой, когда время вычисления может быть неприемлемо большим при использовании стандартных алгоритмов и компьютеров.

Распространенные импульсные характеристики

Дельта-функция

Самой простой импульсной характеристикой является дельта-функция, показанная на Рис.7-1а. При этом импульс на входе системы производит идентичный импульс на выходе. Это означает, что *все* сигналы пропускаются через систему *без изменений*. Свертка любого сигнала с дельта-функцией в точности равна данному сигналу. Математически это записывается в виде:

$$x[n] * \delta[n] = x[n]$$

Уравнение 7-1. Сигнал, свернутый с дельта-функцией, остается неизменным.

Данное свойство определяет дельта-функцию как *тождественность* для свертки. Это аналогично тому, как *нуль* является тождественностью для сложения (a + 0 = a), а *единица* является тождественностью для умножения (a x 1 = a). На первый взгляд, система такого типа тривиальна и неинтересна. Это не так! Подобные системы идеальны для хранения данных, систем передачи и измерения. Большая часть ЦОС направлена на прохождение информации через систему без изменений или ухудшения.

Рис.7-1б показывает незначительную модификацию импульсной характеристики дельта-функции. Если дельта-функция задается с большей или меньшей амплитудой, то получаемая система является *усилителем* или *аттенюатором*, соответственно. В форме уравнения, усиление получается, если *k больше единицы*, а ослабление, если *k меньше единицы*:

$$x[n] * k\delta[n] = kx[n]$$

Уравнение 7-2. Система, которая усиливает или ослабляет сигнал, обладает импульсной характеристикой с масштабированной дельта-функцией.

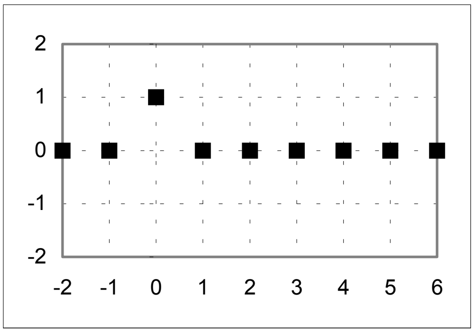
Импульсная характеристика на Рис.7-1в является *смещенной* дельта-функцией. В результате получается система, которая производит идентичный сдвиг входного сигнала. Это свойство можно описать как *задержку* или *опережение* сигнала, в зависимости от направления сдвига. Если сдвиг представить параметром s, то это можно записать в виде:

$$x[n] * \delta[n+s] = x[n+s]$$

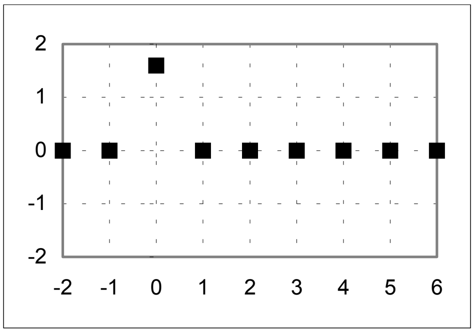
Уравнение 7-3. Относительный сдвиг между входным и выходным сигналами соответствует импульсной характеристике со смещенной дельта-функцией.

В науке и технике часто встречаются случаи, когда один сигнал является смещенной версией другого. Например, представьте радиосигнал, передаваемый с космического зонда на Землю. Время, которое занимает прохождение радиоволной такое расстояние, вызывает задержку между передаваемым и принимаемым сигналами. В биологии, электрические сигналы в смежных нервных клетках являются смещенными версиями друг друга, определяемыми временем, которое занимает прохождение потенциала через синаптический переход.

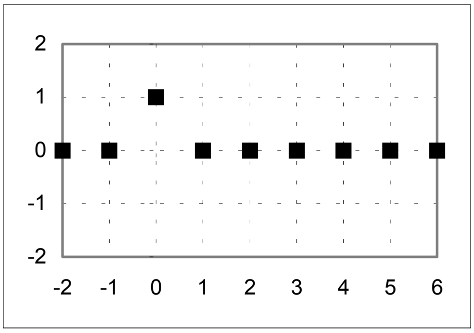
Рис.7-1г показывает импульсную характеристику, построенную из дельта-функции в сумме со второй смещенной и масштабированной дельта-функцией. По принципу суперпозиции, выходной сигнал такой системы будет равен входному сигналу, плюс задержанная версия входного сигнала, т.е. *эхо-сигнал*. Эхо-сигналы являются важной частью множества приложений ЦОС. Добавление эха используется, например, для получения натуральной и приятной аудиозаписи. Радары и сонары используют анализ эхо-сигналов определения летательных аппаратов и подводных лодок, соответственно. В геофизике эхо-сигналы используются для нахождения нефтяных месторождений. Отраженные сигналы важны также в приложениях телефонных сетей, так как их необходимо *устранять*.



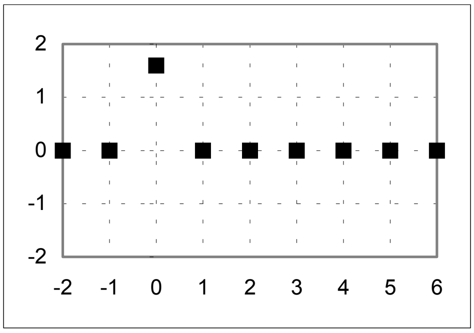
а. Тождественность



б. Усиление & Ослабление



в. Сдвиг



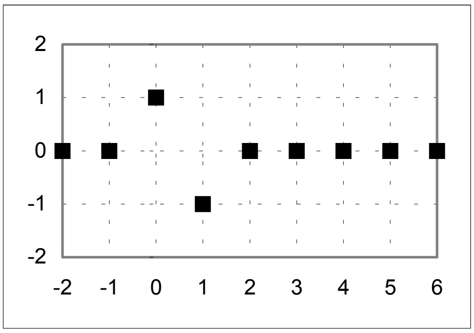
г. Эхо

Рис.7-1. Простые импульсные характеристики с использованием смещенных и масштабированных дельта-функций.

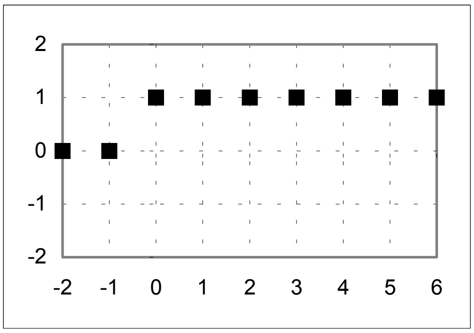
Операции подобные вычислительным

Свертка может изменять входные и выходные сигналы способами, которые имеют сходство с операциями интегрирования и дифференцирования. Поскольку термины «производная» и «интеграл» используются для операций с *непрерывными* сигналами, их дискретным версиям даны другие имена. Дискретная операция, которая подражает *первой производной*, называется *первая разница*. Дискретная форма *интеграла* называется *текущая сумма*. Часто можно услышать и другие названия этих операций: *дискретная производная* и *дискретный интеграл*, хотя математики выражают неодобрение, когда слышат эти неформальные термины.

Рис.7-2 показывает импульсную характеристику, которая реализует вычисление первой разницы и текущей суммы. Рис.7-3. показывает пример использования этих операций. На Рис.7-3а исходный сигнал состоит из нескольких секций с разными наклонами. Свертка такого сигнала с импульсной характеристикой первой разницы производит сигнал, показанный на Рис.7-3б.



а. Первая разница



б. Текущая сумма

Рис.7-2. Импульсные характеристики, подражающие операциям вычисления.

Также как и в случае с первой производной, амплитуда каждой точки в сигнале первой разницы равна *наклону* соответствующей позиции в исходном сигнале. Вычисление текущая суммы является обратной операцией первой разницы, поэтому свертка сигнала на Рис.7-3б с импульсной характеристикой текущей суммы производит сигнал, отображенный на Рис.7-3а.

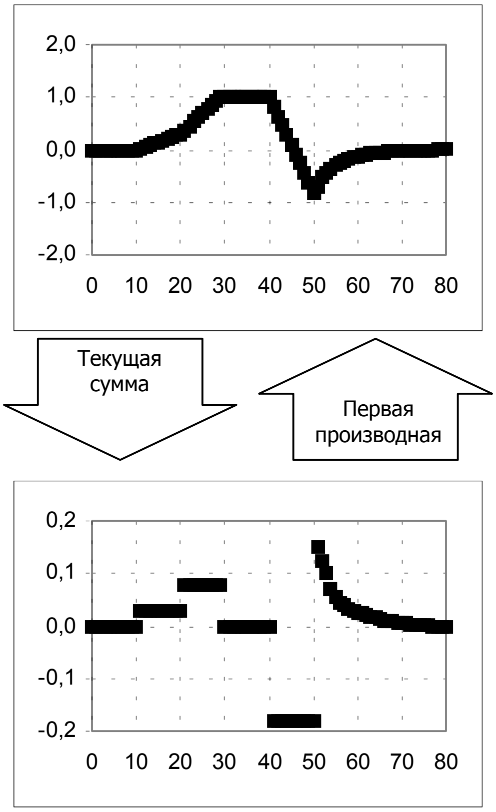


Рис.7-3. Пример обработки подражающей операциям вычисления.

Эти импульсные характеристики достаточно просты, поэтому полной программы вычисления свертки не требуется. Эту задачу можно решить альтернативным способом, вспомнив что каждая выборка выходного сигнала является *суммой взвешенных выборок входного сигнала*. Например, первая разница может быть рассчитана по следующему выражению:

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

Уравнение 7-4. Вычисление первой разницы.

Таким образом, каждая выборка выходного сигнала равна разнице между двумя соседними выборками входного сигнала. Например, y[40] = x[40] – x[39]. Следует заметить, что это не единственный способ определения *первой разницы*. Другим распространенным метод расчета является определения наклона симметрично вокруг точки: y[n] = (x[n–1] + x[n+1])/2.

Используя похожий метод, каждая выборка в текущей сумме может быть рассчитана через сумму всех точек в оригинальном сигнале *слева* от находимой выборки. Например, если y[n] – это текущая сумма x[n], тогда выборка y[40] может быть найдена в виде суммы выборок от x[0] до x[40]. Аналогично, выборка y[41] рассчитывается через сумму выборок от x[0] до x[41]. Естественно, такой метод вычисления неэффективен, поскольку если значение y[40] уже известно, то значение y[41] может быть вычислено с помощью одной операции сложения: y[41] = x[41] + y[40]. Общая формула может быть записана как:

$$y[n] = x[n] + y[n-1]$$

Уравнение 7-5. Вычисление текущей суммы.

Зависимости такого типа называются *рекурсивными выражениями* или *разностными выражениями*. Они будут рассмотрены в Главе 19. В настоящий момент важно понять, что эти зависимости *идентичны* операции свертки, использующей импульсные характеристики, представленные на Рис.7-2. В Таблице 7-1 показаны компьютерные программы, выполняют операции, подобные вычислительным.

```
100 'ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВОЙ РАЗНОСТИ
110 Y[0] = 0
120 FOR I% =1 TO N% -1
130     Y[I%] = X{I%] – Y[I% - 1]
140 NEXT I%
```

```
100 'ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕКУЩЕЙ СУММЫ
110 Y[0] = X[0]
120 FOR I% =1 TO N% - 1
130     Y[I%] = Y[I% - 1] + X[I%]
140 NEXT I%
```

Таблица 7-1.

Низкочастотные и высокочастотные фильтры

Проектирование цифровых фильтров будет детально рассмотрено в следующих главах. На данном этапе необходимо понять основную идею ядра НЧ и ВЧ фильтров (другое название импульсной характеристики фильтра). На Рис.7-4 представлены несколько распространенных ядер НЧ фильтров. В основном, импульсные характеристики НЧ фильтров состоят из группы смежных положительных точек. Это приводит к тому, что каждая выборка выходного сигнала оказывается средневзвешенной суммой нескольких соседних точек входного сигнала. Такое усреднение *сглаживает* сигнал, подавляя высокочастотные составляющие. Как показано на Рис.7-4в для функции sinc, некоторые ядра НЧ фильтров включают в себя выборки с отрицательными значениями. Также как а аналоговой электронике, цифровые НЧ фильтры используются для понижения уровня шума, отделения сигнала, формирования сигнала и т.д.

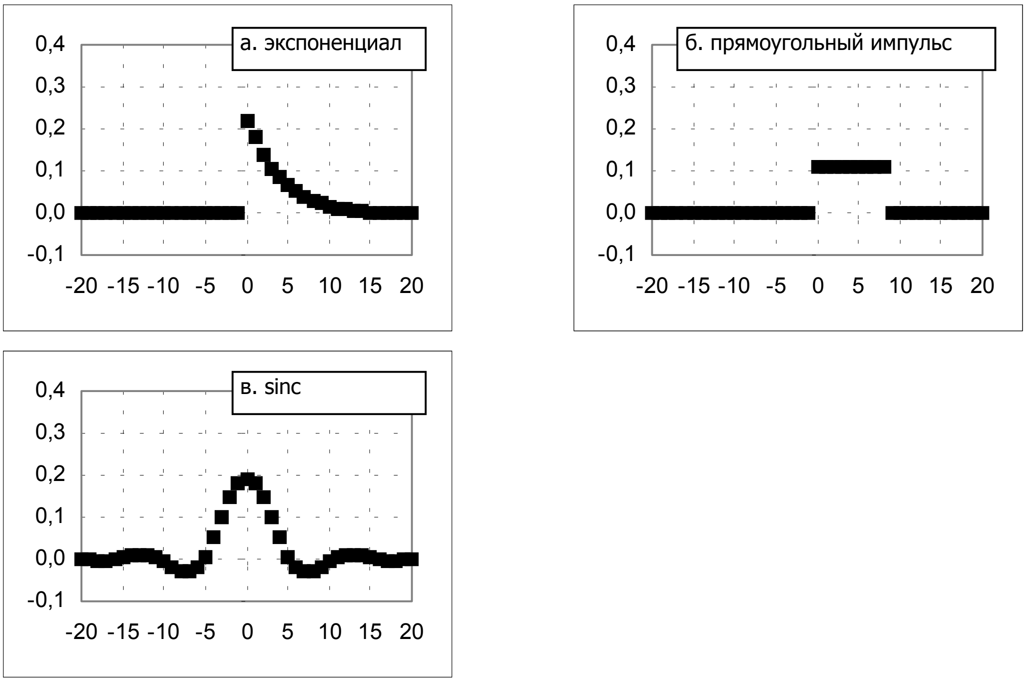


Рис.7-4. Примеры импульсных характеристик НЧ фильтров.

Частота среза фильтра устанавливается изменением ширины импульсной характеристики. Если НЧ фильтр обладает при постоянном токе (нулевая частота) *единичным* значением, тогда сумма всех точек импульсной характеристики должна быть равна *единице*. Как показано на Рис.7-4а и Рис.7-4в, некоторые импульсные характеристики *теоретически* могут расширяться до бесконечности без понижения к нулю. На практике, хвосты характеристик обрезаются после некоторого числа выборок, что позволяет представлять их конечным числом точек. Иначе как их можно было бы записать в компьютер?

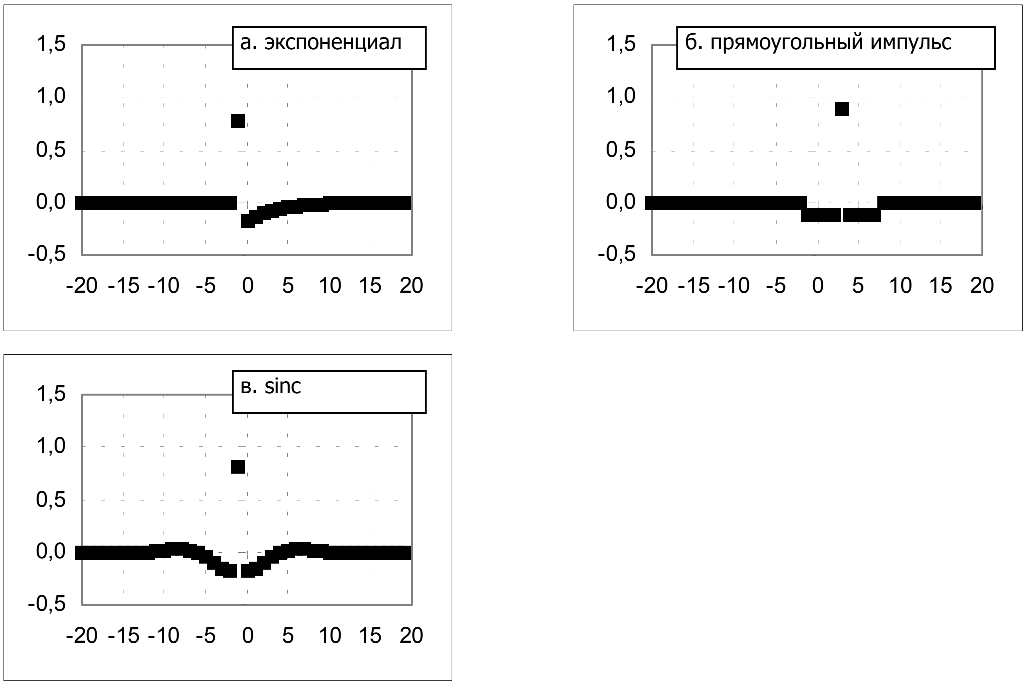


Рис.7-5. Примеры импульсных характеристик ВЧ фильтров.

На Рис.7-5 показаны три распространенных ядра ВЧ фильтров, полученных из соответствующих ядер НЧ фильтров из Рис.7-4. Такой подход часто применяется при проектировании фильтров: сначала разрабатывается НЧ фильтр, а затем он преобразуется в необходимый фильтр: высокочастотный, полосовой, режекторный и т.д.

Чтобы понять преобразование НЧ фильтра в высокочастотный вспомните, что импульсная характеристика дельта-функции пропускает сигнал целиком, в то время как импульсная характеристика НЧ фильтра пропускает только низкочастотные составляющие. Благодаря правилу суперпозиции, фильтрующая импульсная характеристика, состоящая из разности дельта-функции и ядра НЧ фильтра, будет пропускать только высокочастотные составляющие сигнала (весь сигнал минус НЧ составляющие).

Как показано на Рис.7-5, дельта-функцию обычно добавляют в центре симметрии, или в нулевой выборке, если фильтрующее ядро несимметрично. Высокочастотный фильтр имеет при нулевой частоте нулевое значение, достигаемое установлением суммы всех точек импульсной характеристики равной *нулю*.

Причинные и беспричинные сигналы

Представьте простую аналоговую электронную схему. Если вы приложите короткий импульс к ее входу, то увидите ответ на выходе. Это является следствием причины и следствия, на котором основан наш мир. Достоверно известно только одно: *любое следствие должно произойти после причины*. Это основная характеристика *времени*. Теперь сравним это с системой ЦОС, которая преобразует входной сигнал в выходной, которые записываются в массивы на компьютере. Если она имитирует реальную систему, она должна следовать принципу причинности. Например, значение выборки номер восемь во входном сигнале может воздействовать только на выборку номер восемь или больше выходного сигнала. Системы, которые работают таким образом, называют причинными (casual systems). Конечно, при цифровой обработке нет необходимости работать таким образом. Поскольку и входной, и выходной сигналы в порядке номеров записаны в компьютере, любое значение входного сигнала может воздействовать на любое значение выходного сигнала.

Как показано на Рис.7-6, импульсная характеристика причинной системы имеет нулевое значение для всех *отрицательных номеров* выборки. Взгляните на это свойство в плане алгоритма входной стороны для расчета свертки. Чтобы быть причинным, импульс номер n во входном сигнале должен воздействовать только на точки выходного сигнала номер n и больше. Обычно термин «причинный» применяют к любому сигналу, в котором все отрицательные выборки содержат значение ноль.

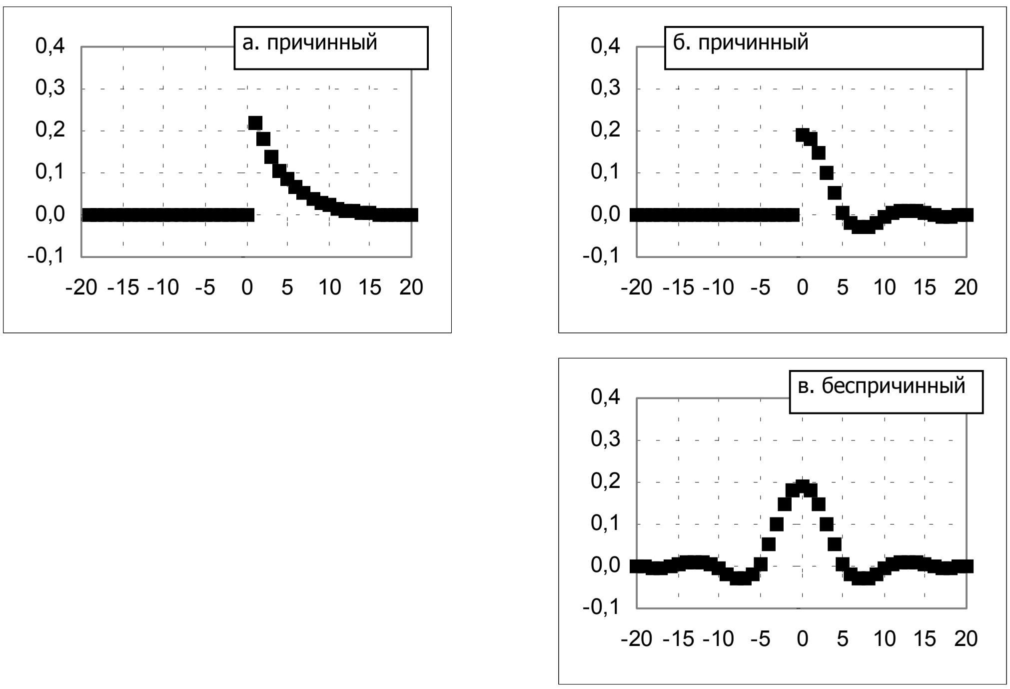


Рис.7-6. Примеры причинных сигналов.

Нуль-фаза, линейная фаза и нелинейная фаза

Рассмотрим Рис.7-7. Говорят, что сигнал обладает *нулевой фазой* если он симметричен слева направо вокруг нулевой выборки. Если сигнал обладает такой симметрией относительно другой выборки, говорят, что он имеет *линейную фазу*. Это подразумевает, что любой линейно-фазовый сигнал может быть преобразован в нуль-фазовый сигнал сдвигом влево или вправо. Наконец, сигнал называют нелинейно-фазовым, если он не обладает горизонтальной (слева направо) симметрией.

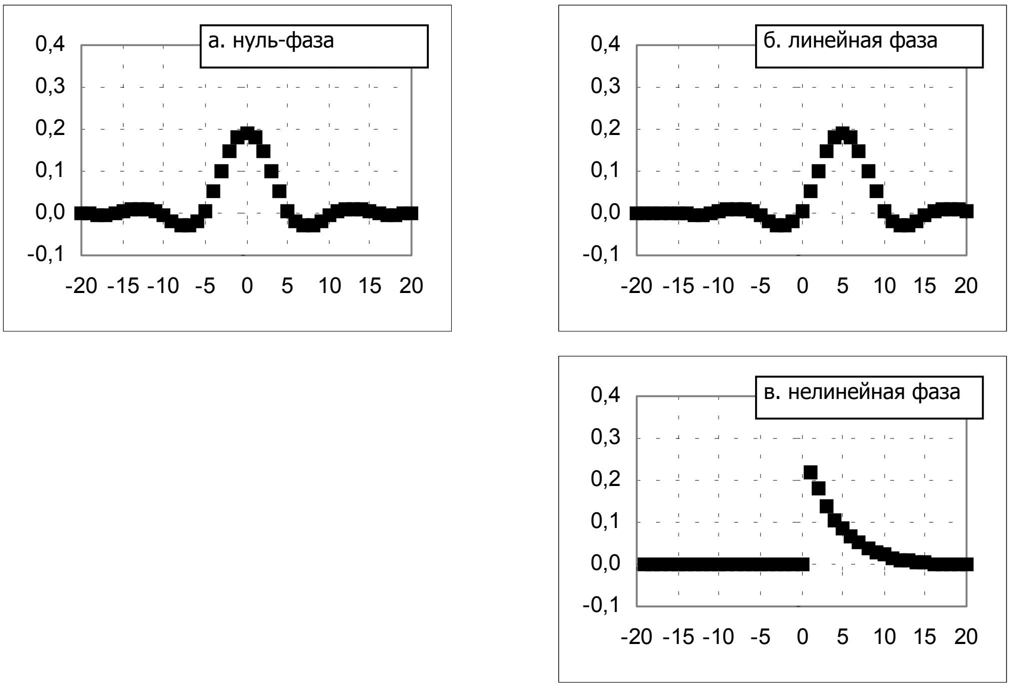


Рис.7-7. Примеры линейности фазы.

Возможно вы думаете, что названия не следуют из определений. Что же такое *фаза* и *симметрия*? Ответ можно найти в спектре частот, и будет обсуждаться более детально в следующих главах. Сейчас важно запомнить, что спектр любого сигнала состоит из двух составляющих: модуля и фазы. Сигнал, спектр частот которого симметричен вокруг нулевой частоты, обладает нуль-фазой. В отличие от него, сигнал, спектр частот которого симметричен относительно другой точки, обладает линейной фазой (фазовой характеристикой в виде прямой линии). Наконец, сигнал, у которого спектр частот несимметричен вокруг какой-либо точки, обладает фазовой характеристикой, которая не представляет собой прямую линию, т.е. он имеет нелинейную фазу.

Необходимо сделать замечание относительно терминов *линейная* и *нелинейная фаза*. Что они имеют общего с концепцией линейности систем, обсуждавшейся в предыдущих главах? Абсолютно ничего! Линейность систем это широкая (размытая) концепция, которая основывается на принципах суперпозиции, однородности, аддитивности и др. *Линейная и нелинейная фаза* означает только то, что график зависимости фазы является или не является прямой линией. Фактически, система должна быть *линейной*, чтобы говорить о том, что фаза является нулевой, линейной или нелинейной.

Математические свойства

Свойство коммутативности

Свойство коммутативности свертки в математической форме выражается как:

$$a[n] * b[n] = b[n] * a[n]$$

Уравнение 7-6. Свойство коммутативности сверки.

Другими словами, порядок, в котором свертываются два сигнала, не имеет значения, поскольку результат одинаков. Как показано на Рис.7-8, это свойство имеет несколько курьезный смысл для теории систем. Получается, что в любой линейной системе входной сигнал и импульсная характеристика могут быть переставлены без изменения выходного сигнала. Это интересно, но не имеет физического смысла, так как входной сигнал и импульсная характеристика – это совсем разные вещи. Если математика *позволяет* делать что-либо, это не означает, что *имеет смысл* делать это. Например, предположим, что вычисляется выражение: 10$/час x 2000 час/год = 20000$/год. Коммутативно свойство операции умножения приводит к тому, что можно работать всего 10 часов в год за 2000$/час! Несмотря на это, свойство коммутативности находит широкое применение в ЦОС для манипулирования выражениями, как в обычной алгебре.

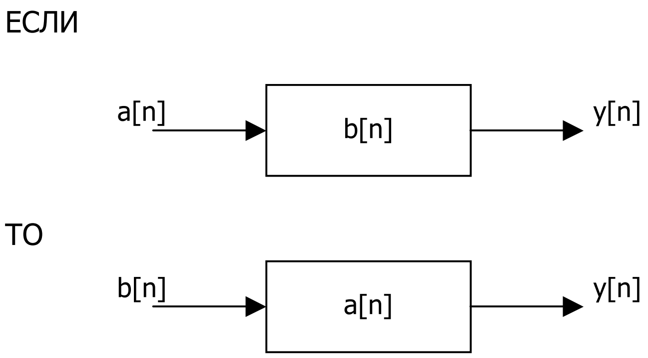


Рис.7-8. Свойство коммутативности в теории систем.

Свойство ассоциативности (сочетательность)

Можно ли свернуть три или более сигнала? Да, и свойство ассоциативности описывает как: сверните два сигнала, чтобы произвести промежуточный сигнал, затем сверните промежуточный сигнал с третьим сигналом. Свойство ассоциативности говорит, что порядок свёртывания не имеет значения:

$$(a[n] * b[n]) * c[n] = a[n] * (b[n] * c[n])$$

Уравнение 7-7. Свойство ассоциативности сверки.

Свойство ассоциативности используется в теории систем для описания поведения *каскадных систем*. Как показано на Рис 7-9, две или более системы j,hfpe.n *каскад*, если выход одной системы используется как вход для следующей системы. Из свойства ассоциативности следует, что порядок систем может быть реорганизован без изменения полного отклика каскада. Более того, любое количество каскадных систем может быть замещено одной системой. Импульсную характеристику замещающей системы находят свёрткой импульсных характеристик всех исходных систем.

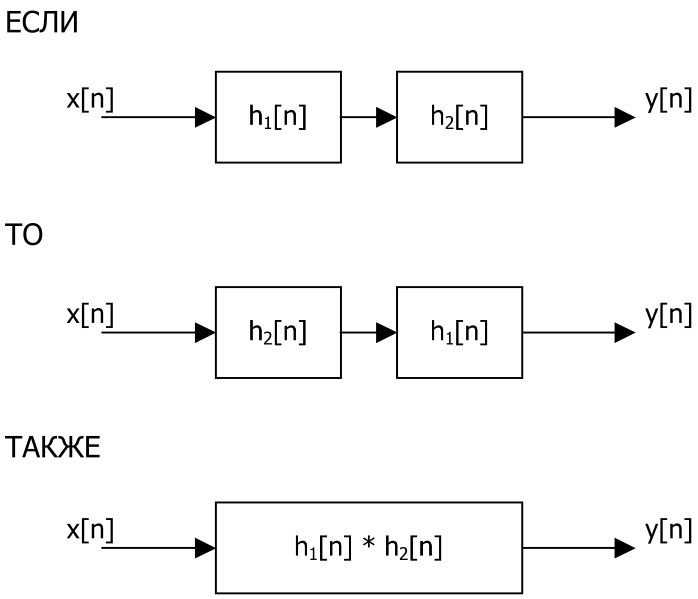


Рис.7-9. Свойство ассоциативности в теории систем.

Свойство дистрибутивности

В форме выражения свойство дистрибутивности записывается как:

$$a[n] * b[n] + a[n] * c[n] = a[n] * (b[n] + c[n])$$

Уравнение 7-8. Свойство дистрибутивности сверки.

Свойство дистрибутивности описывает работу *параллельных систем со сложенными выходами*. Как показано на Рис.7-10, две или более системы могут использовать один и тот же вход, x[n], и складывать свои выходы для формирования итогового выхода, y[n]. Свойство дистрибутивности позволяет заменить комбинацию систем одной системой, имеющей импульсную характеристику, равную сумме импульсных характеристик исходных систем.

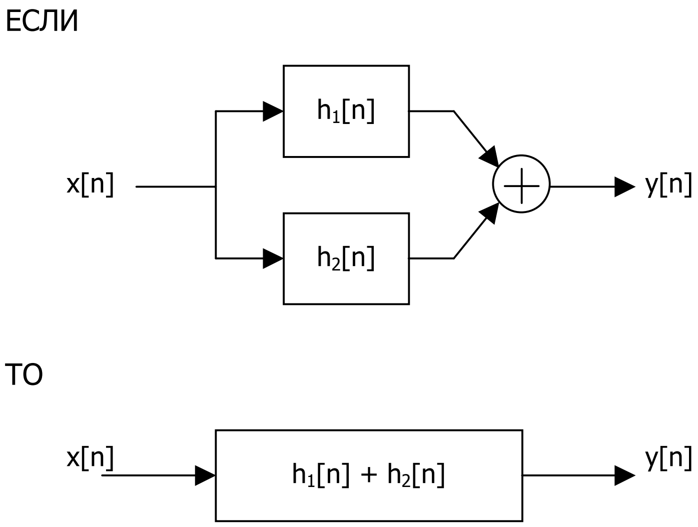


Рис.7-10. Свойство дистрибутивности в теории систем.

Перенос между входом и выходом

Больше чем формальное, это свойство скорее является способом, чтобы понять распространенную ситуацию при обработке сигналов. Представьте себе линейную систему, показанную на Рис.7-11, которая принимает входной сигнал, x[n], и генерирует выходной сигнал, y[n]. Предположим, что входной сигнал изменён некоторым линейным образом, порождающим новый входной сигнал, который мы назовём x'[n]. Это приводит к новому выходному сигналу, y'[n]. Вопрос в том, как изменение входного сигнала отражается на изменении выходного сигнала? Ответ следующий: *выходной сигнал изменится таким же линейным образом*, как был изменён входной сигнал. Например, если входной сигнал усилен с коэффициентом два, выходной сигнал будет также усилен с коэффициентом два. Если от входного сигнала была взята производная, то производная будет также взята от выходного сигнала. Если вход отфильтрован некоторым образом, выход будет также отфильтрован. Это свойство может быть легко доказано с использованием свойства ассоциативности.

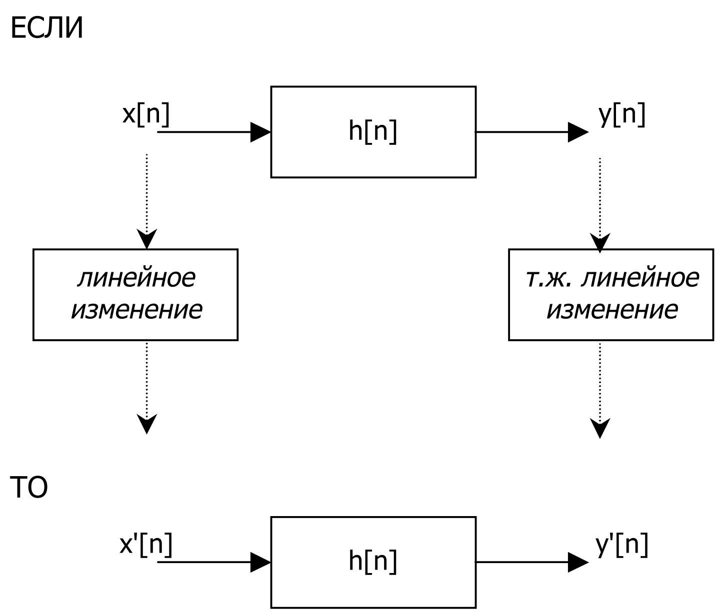


Рис.7-11. Свойство переноса между входом и выходом.

Центральная предельная теорема

Центральная предельная теорема является важным инструментом теории вероятности, так как в ней математически объясняется почему Гауссово распределение вероятности так часто наблюдается в природе. Например, амплитуда термического шума в электронных цепях следует из гауссова распределения; поперечное сечение интенсивности лазерного луча это Гауссиана (колоколообразный импульс) и т.д. В своей простой форме центральная предельная теорема устанавливает, что гауссово распределение проявляется тогда, когда исследуемая переменная является суммой многих случайных процессов. Даже, если составляющие процессы не имеют гауссова распределения, их сумма будет им обладать.

Центральная предельная теорема имеет интересное значение для операции свёртки: если импульсовидный сигнал свёртывается *с собой* несколько раз, получается колоколообразный импульс. Рис.7-12 демонстрирует пример этого. Сигнал (а) это неправильный импульс, намеренно выбранный таким образом, чтобы отличаться от Гауссианы. На Рис.7-12б показан результат свёртки этого сигнала с собой один раз. Рис (в) показывает результат свёртки этого сигнала с самим собой три раза. Даже после трёх свёрток, волновая форма выглядит очень похожей на колоколообразный импульс. На математическом жаргоне, процедура сходимости к Гауссиане очень быстра. Ширина результирующей Гауссианы (т.е., σ в Уравнениях 2-7, 2-8) равна ширине исходного импульса (выражается как σ в Уравнении 2-7), умноженной на квадратный корень из числа свёрток.

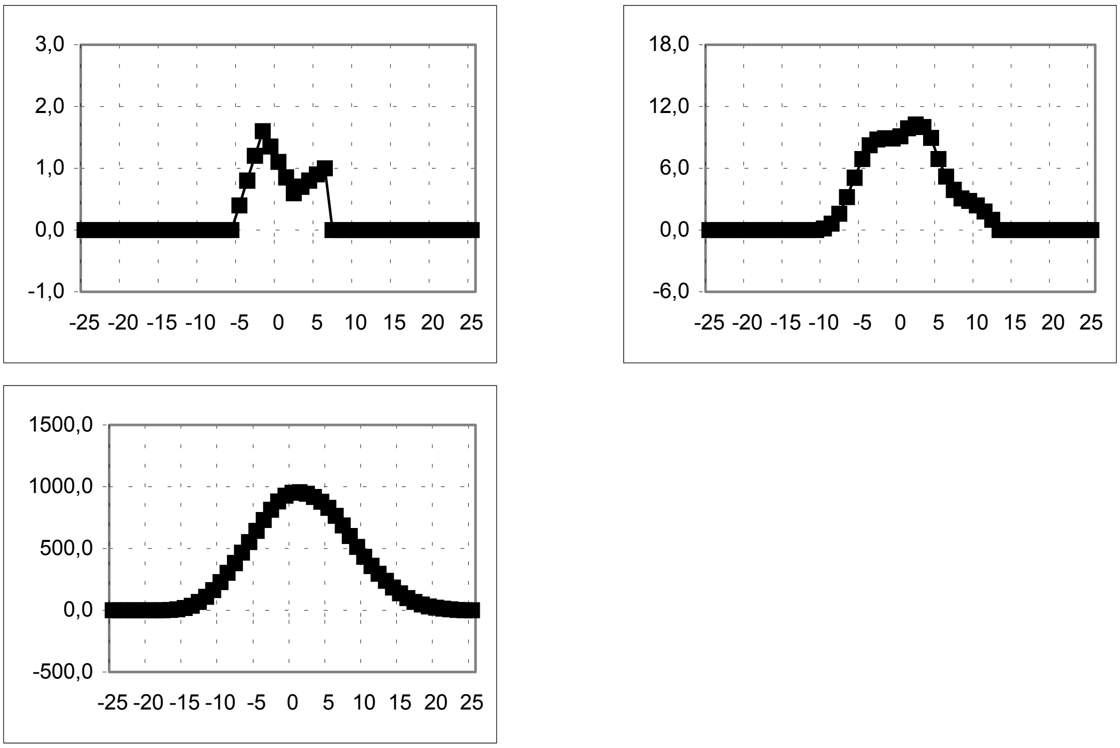


Рис.7-12. Пример свертки импульсовидного сигнала с самим собой.

Корреляция

Концепция корреляции может быть представлена наилучшим образом с помощью примера. Рис.7-13 показывает ключевые элементы системы радар. Специально сконструированная антенна передаёт в выбранном направлении короткий радиосигнал. Если распространяющиеся волны наталкиваются на объект, например, вертолет, небольшая часть энергии отражается обратно по направлению к радиоприёмнику, расположенного около передатчика. Переданный импульс имеет форму, которая выбирается специально, например, как на этом примере, треугольную. Принятый сигнал будет состоять из двух составляющих: (1) сдвинутая и масштабированная версия переданного импульса, и (2) случайный шум, возникающий от интерференции радиоволн, тепловой шум в электронике, и т.д. Так как радиосигналы распространяются со скоростью света, сдвиг между переданным и принятым импульсами является прямым измерением расстояния до обнаруженного объекта. Возникает следующая проблема: какой способ является лучшим для обнаружения сигнала некоторой известной формы в *другом* сигнале. Ответ – метод корреляции.

Корреляция – это математическая операция, которая очень похожа на свёртку. Также как свёртка, корреляция использует два сигнала для получения третьего. Этот третий сигнал называется *корреляционным* сигналом двух входных сигналов. Если сигнал коррелирован *сам с собой*, то результирующий сигнал называют *автокорреляционным*. В предыдущей главе был представлен механизм свёртки. Подобным образом Рис.7-14 иллюстрирует *механизм корреляции*. В нем показаны принятый сигнал, x[n], и корреляционный сигнал, y[n]. Форму волны, которую следует опознать, t[n], принято называть *сигналом от цели* (целевым сигналом); она содержится внутри механизма корреляции. Каждая выборка в y[n] вычисляется передвижением механизма корреляции влево или вправо до тех пор, пока он не укажет на ту выборку, которая должна быть обработана. Далее, указанные выборки из принятого сигнала попадают в механизм корреляции, и умножаются на соответствующие целевого сигнала. Сумма произведений помещается в соответствующую выборку корреляционного сигнала.

Амплитуда каждой выборки в корреляционном сигнале является мерой того, насколько в *данном месте* принятый сигнал *похож* целевой. Это означает, что в корреляционном сигнале будет наблюдаться пик амплитуды для каждого целевого сигнала, который присутствует в принятом сигнале. Другими словами, величина корреляции будет в максимуме, когда целевой сигнал выравнивается по свойствам с принятым сигналом.

Что если целевой сигнал содержит выборки с отрицательной величиной? Ничего не изменится. Представьте, что механизм корреляции позиционирован таким образом, что целевой сигнал выровнен с сопоставимой формой волны в принятом сигнале. Когда выборки из принятого сигнала попадают в механизм корреляции, они умножаются на соответствующие выборки в целевом сигнале. Если пренебречь шумом, положительная выборка будет умножена сама на себя, и произведение будет положительным числом. Подобным образом, отрицательная выборка будет умножена сама на себя, в результате чего также будет положительное число. Даже если целевой сигнал полностью отрицательный, пик корреляционного сигнала будет оставаться положительным.

Если в принятом сигнале присутствует шум, он будет также присутствовать в корреляционном сигнале. Это неизбежный факт, что случайный шум может выглядеть подобно выбранному целевому сигналу. Шум корреляционного сигнала является измерением этого подобия. Кроме этого, пик, сформировавшийся в корреляционном сигнале симметричен слева и справа. Это справедливо даже в том случае, если целевой сигнал несимметричен. Вдобавок, ширина пика это является удвоенной величиной ширины целевого сигнала. Помните о том, что корреляция пытается обнаружить целевой сигнал, а не восстановить его.

Корреляция является *оптимальным* методом обнаружения известной формы сигнала в случайном шуме. Другими словами, пик выходного сигнала будет более высоким по отношению к шуму при использовании корреляции, чем на выходе любой другой линейной системы (чтобы быть корректным, это относится только к случайному белому шуму). Использование корреляции для обнаружения известной формы сигнала часто называют *согласованной фильтрацией*. Более детально данный вопрос будет рассмотрен в Главе 17.

Механизм корреляции и механизм свёртки идентичны, исключая одну маленькую деталь. Как обсуждалось в предыдущей главе, сигнал внутри механизма свёртки *дискретно смещается* слева направо. Это означает, что выборки номеров: 1,2,3… проходят справа налево. В механизме корреляции дискретное перемещение следует в нормальном порядке.

Поскольку разница между этими двумя операциями состоит только в обратном порядке обработки выборок, *корреляцию* можно представить с помощью такой же математики, как и *свертку*. Это требует только предварительного транспонирования одного из двух сигналов, который должен быть коррелирован. Например, если a[n] и b[n] свертываются, чтобы произвести выходной сигнал, c[n], выражение записывают в виде: $a[n] * b[n] = c[n]$. Корреляция этих сигналов может быть записана в виде: $a[n] * b[-n] = c[n]$, так как изменение дискретного перемещения сопровождается лишь изменением знака индекса выборки.

При этом между операциями свертки и корреляции нет *математического* сходства. Они представляют собой разные операции ЦОС. Свёртка – это соотношение между входным сигналом системы, выходным сигналом, и импульсной характеристикой. Корреляция – это способ обнаружения известного сигнала в шумовом фоне. Математическое подобие – это только совпадение.

Скорость

Написание программы для свёртывания одного сигнала с другим – это простая задача, требующая несколько строчек кода. Время выполнения такой программы может оказаться более проблемным. Весь вопрос заключен в количестве операций сложения и умножения, требуемых для реализации алгоритма, вследствие чего может потребоваться большое время вычисления. Как показано в программах предыдущей главы, самое длительное время вычисления требуется на умножение двух чисел и добавление произведения в аккумулятор. Остальные операции, как, например, индексация массивов выполняются достаточно быстро. Умножение с накоплением – это основной вычислительный блок в ЦОС, и мы увидим, что он применяется и в других важных алгоритмах. Фактически, скорость компьютеров ЦОС часто характеризуется временем выполнения операций умножения с накоплением.

Если сигнал, составленный из N выборок, сворачивается с сигналом, составленным из M выборок, должно быть выполнено N x M умножений с накоплением. Персональные компьютеры середины 90-х годов (100 МГц, Pentium) требовали для выполнения этой операции около одной микросекунды, поэтому операция свёртки сигнала, имеющего один миллион точек, с импульсной характеристикой, имеющей 3000 точек, могла вычисляться около часа. Десять лет ранее (12 МГц, 80286) это вычисление потребовало бы три дня!

Обычно проблема уменьшения времени выполнения преодолевается тремя способами. Первый: используйте более короткие сигналы и арифметику с плавающей запятой. Если требуется выполнить операцию свёртки лишь несколько раз, это станет лучшим компромиссом между скоростью выполнения и усилиями, затраченными на программирование. Второй: используйте компьютер, специально спроектированный для ЦОС. Цифровой процессор обработки сигналов (DSP, ЦПОС) тратит на умножение с накоплением несколько десятков наносекунд. Это лучшее решение, если планируется выполнять свёртку много раз.

Третье решение – использовать лучший алгоритм для вычисления свёртки. В Главе 17 описывается сложный алгоритм, названный БПФ свёрткой. БПФ свёртка дает такой же результат, как и простые алгоритмы расчета свёртки, представленные в предыдущей главе, при этом время выполнения вычислений значительно уменьшается. Для сигналов с тысячами выборок, БПФ свёртка может быть рассчитана в сотни раз быстрее. Единственное неудобство – сложность программы. Даже если метод изучен и знаком, можно затратить несколько часов на то, чтобы запустить программу вычисления.