CHAPTER 30

Complex Numbers
Комплексные числа

Complex numbers are an extension of the ordinary numbers used in everyday math. They have the unique property of representing and manipulating *two* variables as a *single* quantity. This fits very naturally with Fourier analysis, where the frequency domain is composed of two signals, the real and the imaginary parts. Complex numbers shorten the equations used in DSP, and enable techniques that are difficult or impossible with real numbers alone. For instance, the Fast Fourier Transform is based on complex numbers. Unfortunately, complex techniques are very mathematical, and it requires a great deal of study and practice to use them effectively. Many scientists and engineers regard complex techniques as the dividing line between DSP as a *tool*, and DSP as a *career*. In this chapter, we look at the mathematics of complex numbers, and elementary ways of using them in science and engineering. The following three chapters discuss important techniques based on complex numbers: the *complex Fourier transform*, the *Laplace transform*, and the *z-transform*. These complex transforms are the heart of theoretical DSP. Get ready, here comes the math!

Комплексные числа – удлинение обычных чисел, используемых в каждодневной математике. Они имеют уникальное свойство представления и управления *двумя* переменными как *одиночной*(единичной) величиной. Это очень естественно согласуется с анализом Фурье, где частотный домен составлен из двух сигналов, реальной и мнимой частей. Комплексные числа сокращают уравнения, используемые в ЦОС, и допускают методы, которые являются трудными или невозможными с одними вещественными числами. Например, Быстрое преобразование Фурье основано на комплексных числах. К сожалению, комплексные методы очень математические, и это требует много изучения и практики, чтобы использовать их эффективно. Многие ученые и инженеры расценивают комплексные методы как разделительную линию между ЦОС как *инструмент*, и ЦОС как *карьера*. В этой главе, мы рассмотрим математику комплексных чисел, и элементарных путей использования их в науке и технике. Следующий три главы обсуждают важные методы, основанные на комплексных числах: *комплексное преобразование Фурье*, *преобразование Лапласа*, и z-трансформанту. Эти комплексные трансформанты - основа(сердце) теории ЦОС. Подготовьтесь, здесь спутник математика!

The Complex Number System
Система Комплексного числа

To illustrate complex numbers, consider a child throwing a ball into the air. For example, assume that the ball is thrown straight up, with an initial velocity of 9.8 meters per second. One second after it leaves the child's hand, the ball has reached a height of 4.9 meters, and the acceleration of gravity (9.8 meters per second 2) has reduced its velocity to zero. The ball then accelerates toward the ground, being caught by the child two seconds after it was thrown. From basic physics equations, the height of the ball at any instant of time is given by:

Чтобы иллюстрировать комплексные числа, рассмотрите ребенка, подбрасывает шар в воздух. Например, предположите, что шар брошен прямо, с начальной скоростью 9.8 метров в секунду. Через секунду после броска, шар достиг высоты 4.9 метров, и ускорение тяжести (9.8 метров в секунду 2) привело ее скорость к нулю. Шар тогда с ускорением начинает падать к земле, и ловится ребенком через две секунды после того, как он было брошен. Из основных уравнений физики, высота шара в любой момент времени дается:

$$h = \frac{-gt^2}{2} + vt$$

Где h - высота над землей (в метрах), g - ускорение тяжести (9.8 метров в секунду^2), v - начальная скорость (9.8 метров в секунду), и t - время (в секундах).

Теперь, предположите, что мы хотим знать, когда шар передает некоторую высоту. Подключая известные значения и решая уравнение находим t:

$$t = 1 \pm \sqrt{1 - h/4.9}$$

Например, шар - на высоте 3 метров дважды: t = 0.38 (подбрасывание) и t = (падение) 1.62 секунд.

As long as we ask reasonable questions, these equations give reasonable answers. But what happens when we ask unreasonable questions? For example: At what time does the ball reach a height of 10 meters? This question has no answer in reality because the ball *never* reaches this height. Nevertheless, plugging the value of h = 10 into the above equation gives two answers: $t = 1 + \sqrt{-1.041}$ and $t = 1 - \sqrt{-1.041}$. Both these answers contain the square-root of a negative number, something that does not exist in the world as we know it. This unusual property of polynomial equations was first used by the Italian mathematician Girolamo Cardano (1501-1576). Two centuries later, the great German mathematician Carl Friedrich Gauss (1777-1855) coined the term **complex numbers**, and paved the way for the modern understanding of the field.

Пока мы задаем разумные вопросы, эти уравнения дают разумные ответы. Но что случается, когда мы задаем неблагоразумные вопросы? Например: В какое время шар достигнет высоты 10 метров? Этот вопрос не имеет никакого ответа в действительности, потому что шар никогда не достигает этой высоты. Однако, подключая значение h = 10 в вышеупомянутое уравнение дает два ответа: $t = 1 + \sqrt{-1.041}$ и $t = 1 - \sqrt{-1.041}$. Оба ответа содержат квадратный корень отрицательного числа, кое-что, чего не существует в мире поскольку, мы знаем это. Это необычное свойство полиномиальных уравнений сначала использовалось итальянским математиком Girolamo Cardano (1501-1576). Два столетия назад, выдающийся немецкий математик Carl Friedrich Gauss (1777-1855) предложил термин комплексные числа, и проложил путь к современному пониманию поля(области математики).

Every complex number is the sum of two components: a **real part** and an **imaginary part**. The real part is a **real number**, one of the ordinary numbers we all learned in childhood. The imaginary part is an **imaginary number**, that is, the *square-root of a negative number*. To keep things standardized, the imaginary part is usually reduced to an ordinary number multiplied by the square-root of negative one. As an example, the complex number: $i = 1 + \sqrt{-1.041}$, is first reduced to: $i = 1 + \sqrt{1.041}\sqrt{-1}$, and then to the final form: $i = 1 + 1.02\sqrt{-1}$. The real part of this complex number is I, while the imaginary part is $1.02\sqrt{-1}$. This notation allows the abstract term, $\sqrt{-1}$, to be given a special symbol. Mathematicians have long used *i* to denote $\sqrt{-1}$. In comparison, electrical engineers use the symbol, *j*, because *i* is used & 1 to represent electrical current. Both symbols are common in DSP. In this book the electrical engineering convention, *j*, will be used.

Каждое комплексное число - сумма двух компонентов: **вещественная часть** и **мнимая часть**. Реальная часть - **вещественное число**, одно из обычных чисел, которые все мы узнали в детстве. Мнимая часть - **мнимое число**, то есть к*вадратный корень отрицательного числа*. Сохранять вещи стандартизированный, мнимая часть обычно приводится к обычному числу, умноженному на квадратный корень из –1 ($\sqrt{-1}$). Как пример, комплексное число: $i = 1 + \sqrt{-1.041}$, сначала сокращено к: $i = 1 + \sqrt{1.041}\sqrt{-1}$, и затем к конечной форме: $i = 1 + 1.02\sqrt{-1}$. Вещественная часть этого комплексного числа - I, в то время как мнимая часть $1.02\sqrt{-1}$. Эта система обозначений позволяет абстрактный термин, $\sqrt{-1}$, быть дан специальный символ. Математики издавна использовали *i*, чтобы обозначить мнимую часть. Для сравнения, инженеры - электрики используют символ, *j*, потому что *i* и I используются, чтобы представить электрический ток. Оба символа обычны в ЦОС. В этой книге, согласно с электротехникой, будет использоваться *j*.

Например, все следующие числа имеют силу комплексных чисел: 1+2*j* 1-2*j*, -1+2*j*, 3.14159+2.7183*j*, (4/3)+(19/2)*j*, и т.д. Все обычные числа, типа: 2,6.34, и -1.414, могут быть представлены как комплексное число с нулем для мнимой части, то есть 2+0*j* и 1.414 +0*j*.

Just as real numbers are described as having positions along a number line, complex numbers are represented by locations in a two-dimensional display called the **complex plane**. As shown in Fig. 30-1, the horizontal axis of the complex plane is the real part of the complex number, while the vertical axis is the imaginary part. Since real numbers are those complex numbers that have an imaginary part equal to zero, the *real number line* is the same as the *x-axis* of the complex plane.

Так же, как вещественные числа описаны как наличие позиций на числовой оси, комплексные числа представлены расположениями в двумерном дисплее называемом **комплексной плоскостью**. Как показано в рис. 30-1, горизонтальная ось комплексной плоскости - вещественная часть комплексного числа, в то время как вертикальная ось – мнимая часть. Так как вещественные числа - те комплексные числа, которые имеют мнимую часть, равную нулю, *строка вещественного числа* - та же самая как *ось x* комплексной плоскости.

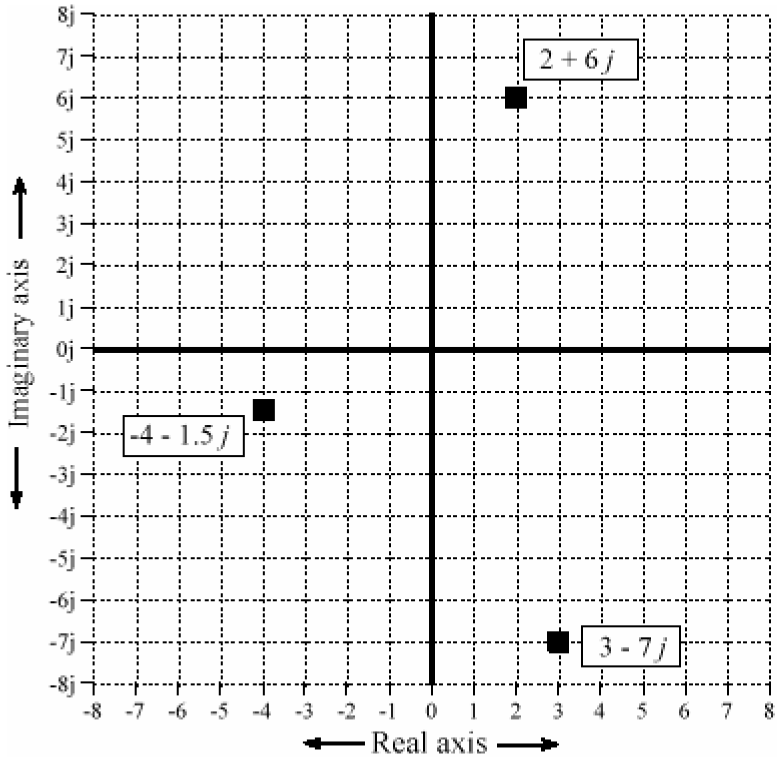

РИСУНОК 30-1
Комплексная плоскость. Каждое комплексное число имеет уникальное расположение в комплексной плоскости, как иллюстрировано этими тремя примерами, показанными здесь. Горизонтальная ось представляет вещественную часть, в то время как вертикальная ось представляет мнимую часть.

В математических уравнениях, комплексное число представлено отдельной переменной, даже притом, что это составлено из двух частей. Например, эти три комплексные переменные в рис. 30-1 могли быть записаны:

$$\begin{aligned} A &= 2 + 6j \\ B &= -4 - 1.5j \\ C &= 3 - 7j \end{aligned}$$

where A, B, & C are complex variables. This illustrates a strong *advantage* and a strong *disadvantage* of using complex numbers. The advantage is the inherent shorthand of representing two things by a single symbol. The dis-advantage is having to remember which variables are complex and which variables are ordinary numbers.

Где A, B, и C - комплексные переменные. Это иллюстрирует сильное *преимущество* и сильный *недостаток* использования комплексных чисел. Преимущество - свойственная стенография представления двух вещей единственным(отдельным) символом. Недостаток должен, необходимость помнить, которые переменные являются комплексными и которые переменные являются обычными числами.

The mathematical notation for separating a complex number into its real and imaginary parts uses the operators: *Re*( ) and *Im*( ). For example, using the above complex numbers:

Математическая система обозначений для отделения комплексного числа в его вещественные и мнимые части использует операторы: *Re*( ) и *Im*( ). Например, используя комплексные числа выше:

$$\begin{aligned} &Re\,A = 2 &\qquad &Im\,A = 6 \\ &Re\,B = -4 &\qquad &Im\,B = -1.5 \\ &Re\,C = 3 &\qquad &Im\,C = -7 \end{aligned}$$

Notice that the value returned by the mathematical operator, *Im* ( ), does not include the *j*. For example, *Im*(3 + 4*j*)4*j* is equal to 4, not .

Обратите внимание, что значение, возвращенное математическим оператором, *Im*( ), не включает *j*. Например, *Im*(3 + 4*j*)4*j* не равно 4.

Complex numbers follow the same algebra as ordinary numbers, treating the quantity, *j*, as a constant. For instance, addition, subtraction, multiplication and division are given by:

Комплексные числа придерживаются той же самой алгебры как обычные числа, обрабатывая количество, *j*, как константа. Например, сложение, вычитание, умножение и деление дается:

УРАВНЕНИЕ 30-1
Сложение комплексных чисел.

$$(a+bj)+(c+dj) = (a+c)+j(b+d)$$

УРАВНЕНИЕ 30-2
Вычитание комплексных чисел.

$$(a+bj)-(c+dj) = (a-c)+j(b-d)$$

УРАВНЕНИЕ 30-3
Умножение комплексных чисел.

$$(a+bj)(c+dj) = (ac-bd)+j(bc+ad)$$

УРАВНЕНИЕ 30-4
Деление комплексных чисел.

$$\frac{(a+bj)}{(c+dj)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + j\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

Two tricks are used when manipulating equations such as these. First, whenever a j^2 term is encountered, it is replaced by -1. This follows from the definition of *j*, that is: $j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$. The second trick is a way to eliminate the *j* term from the denominator of a fraction. For instance, the left side of Eq. 30-4 has a denominator of *c* + *dj*. This is handled by multiplying the numerator and denominator by the term *c* - *jd*, cancelling all the imaginary terms from the denominator. In the jargon of the field, switching the sign of the imaginary part of a complex number is called taking the **complex conjugate**. This is denoted by a star at the upper right corner of the variable. For example, if *Z* = *a* + *bj*, then *Z** = *a* - *bj*. In other words, Eq. 30-4 is derived by multiplying both the numerator and denominator by the complex conjugate of the denominator.

Две уловки используются при управлении уравнениями типа них. Во первых, всякий раз, когда сталкиваются с термином j^2, это заменено -1. Это следует из определения *j*, которое: $j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$. Вторая уловка - способ исключить термин *j* из знаменателя дроби. Для образца, левая сторона уравнения 30-4 имеет знаменатель *c* + *dj*. Это обработано, умножая числитель и знаменатель выражением *c* - *jd*, отменяя все мнимые выражения из знаменателя. В жаргоне поля, изменение знака мнимой части комплексного числа называется, **комплексно сопряженный**. Это обозначено звездой в верхнем правом угле переменной. Например, если *Z* = *a* + *bj*, то *Z** = *a* - *bj*. Другими словами, уравнение 30-4 получено, умножая, и числитель и знаменатель комлексно сопряженным из знаменателя.

The following properties hold even when the variables A, B, and C are complex. These relations can be proven by breaking each variable into its real and imaginary parts and working out the algebra.

Следующие свойства сохраняются даже, когда переменные А, В, и С комплексны. Эти отношения могут быть доказаны, разбивая каждую переменную на ее вещественные и мнимые части и разрабатывая алгебру.

УРАВНЕНИЕ 30-5
Коммутативное свойство.

$$AB = BA$$

УРАВНЕНИЕ 30-6
Ассоциативное свойство.

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

УРАВНЕНИЕ 30-7
Дистрибутивное(распределительное) свойство.

$$A(B + C) = AB + AC$$

Polar Notation
Полярная Система обозначений

Complex numbers can also be expressed in *polar notation*, besides the *rectangular notation* just described. For example, Fig. 30-2 shows three complex numbers in polar form, the same ones previously presented in Fig. 30-1. The **magnitude** is the length of the vector starting at the origin and ending at the complex point, while the **phase angle** is measured between this vector and the positive x-axis. Complex numbers can be converted between rectangular and polar notation by the following equations (paying attention to the polar notation *nuisances* discussed in Chapter 8):

Комплексные числа могут также быть выражены в *полярной системе* обозначений, помимо *прямоугольной системы* обозначений, только что описанной. Например, рис. 30-2 показывает три комплексных числа в полярной форме, те же самые, предварительно представленные в рис. 30-1. **Величина** - длина вектора, начинающегося в начале координат и заканчивающегося в комплексной точке, в то время как **фазовый угол** измерен между этим вектором и положительной осью x. Комплексные числа могут быть преобразованы между прямоугольной и полярной системой обозначений следующими уравнениями (обратите внимание на полярные помехи системы обозначений, обсужденные в главе 8):

EQUATION 30-8
Rectangular-to-polar conversion. The complex variable, A, can be changed from rectangular form: *Re* A & *Im* A, to polar form: M & θ.
УРАВНЕНИЕ 30-8
Преобразование прямоугольной в полярную. Комплексная переменная, А, может быть изменена из прямоугольной формы: *Re* A и *Im* A, к полярной форме: M и θ.

$$M = \sqrt{(Re\,\mathrm{A})^2 + (Im\,\mathrm{A})^2}$$

$$\theta = \arctan\left[\frac{Im\,\mathrm{A}}{Re\,\mathrm{A}}\right]$$

EQUATION 30-9
Polar-to-rectangular conversion. This is changing the complex number from M & θ to *Re* A & *Im* A.
УРАВНЕНИЕ 30-9
Преобразование полярной в прямоугольную. Это изменяет комплексное число M и θ в *Re* A и *Im* A.

$$Re\,\mathrm{A} = M\cos(\theta)$$

$$Im\,\mathrm{A} = M\sin(\theta)$$

This brings up a giant leap in the mathematics. (Yes, this means you should pay extra attention). A complex number written in rectangular notation is in the form: $a + bj$. The information is carried in the variables: a - b, but the proper complex number is the entire expression: $a + bj$. In polar form, the key information is contained in M & θ, but what is the full expression for the proper complex number?

Это поднимает гигантский прыжок в математике. (Да, это означает, что Вы должны уделить дополнительное внимание). Комплексное число, написанное в прямоугольной системе обозначений находится в форме: $a + bj$. Информацию несут в переменных: a - b, но надлежащее комплексное число - полное выражение: $a + bj$. В полярной форме, ключевая информация содержится в M и θ, но какой - полное выражение для надлежащего комплексного числа?

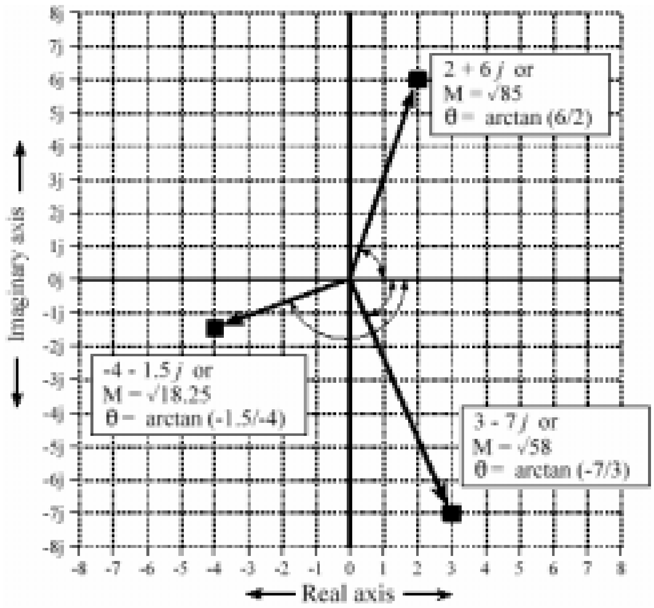

FIGURE 30-2
Complex numbers in polar form. Three example points in the complex plane are shown in polar coordinates. Figure 30-1 shows these same points in rectangular form. Imaginary axis
РИСУНОК 30-2
Комплексные числа в полярной форме. Показывается пример трех точек в комплексной плоскости в полярных координатах. На рисунке 30-1 показаны те же самые точки в прямоугольной форме.

The key to this is Eq. 30-9, the polar-to-rectangular conversion. If we start with the proper complex number, $a + bj$, and apply Eq. 30-9, we obtain:

Ключ к этому - уравнение 30-9, преобразование полярной в прямоугольную. Если мы начинаем с надлежащего комплексного числа, $a + bj$, и применяем уравнение 30-9, мы получаем:

$$a + jb = M(\cos\theta + j\sin\theta)$$

EQUATION 30-10
Rectangular and polar complex numbers. The left side is the rectangular form of a complex number, while the expression on the right is the polar representation. The conversion between: M & θ and a & b, is given by Eqs. 30-8 and 30-9.
УРАВНЕНИЕ 30-10
Прямоугольные и полярные комплексные числа. Левая сторона - алгебраическая форма комплексного числа, в то время как выражение справа - полярное представление. Преобразование между: M и θ, и a и b, дается уравнениями 30-8 и 30-9.

The expression on the left is the proper *rectangular* description of a complex number, while the expression on the right is the proper *polar* description.

Выражение слева - надлежащее *прямоугольное* описание комплексного числа, в то время как выражение справа - надлежащее *полярное* описание.

Before continuing with the next step, let's review how we arrived at this point. First, we gave the rectangular form of a complex number a graphical representation, that is, a location in a two-dimensional plane. Second, we defined the terms M & θ to be consistent with our previous experience about the relationship between polar and rectangular coordinates (Eq. 30-8 and 30-9). Third, we followed the mathematical consequences of these actions, arriving at what the correct polar form of a complex number must be, i.e., $M(\cos\theta + j \sin\theta)$. Even though this logic is straightforward, the result is difficult to see with "intuition." Unfortunately, it gets worse.

Прежде чем сделать следующий шаг, давайте сделаем обзор того, как мы достигли этого пункта. Во первых, мы дали алгебраической форме комплексного числа графическое представление, то есть расположение в двумерной плоскости. Во вторых, мы определили термины M и θ, чтобы быть совместимыми с нашим предыдущим опытом относительно отношений между полярными и прямоугольными координатами (уравнение 30-8 и 30-9). Третье, мы следовали за математическими последствиями этих действий, достигая, что полярная форма комплексного числа должна быть правильной(корректной), то есть, $M(\cos\theta + j \sin\theta)$. Даже притом, что это прямая логика, результат трудно предвидеть "интуитивно". К сожалению, это ухудшается(неблагоприятно).

One of the most important equations in complex mathematics is **Euler's relation**, named for the clever and very prolific Swiss mathematician, Leonhard Euler (1707-1783; Euler is pronounced: "Oiler"):

Одно из наиболее важных уравнений в комплексной математике - **отношение Эйлера**, названное по имени умного и очень плодовитого швейцарского математика, Леонардо Эйлера (1707-1783; Эйлер объявлен: "Нефтяник"):

УРАВНЕНИЕ 30-11
Отношение Эйлера. Это - ключевое уравнение для использования комплексных чисел в науке и технике.

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

If you like such things, this relation can be proven by expanding the exponential term into a Taylor series:
Если Вы любите такие вещи, это отношение может быть доказано, разворачивая показательный термин в ряд Тейлора:

$$e^{jx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(jx)^n}{n!} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right] + j \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right]$$

The two bracketed terms on the right of this expression are the Taylor series for $\cos(x)$ and $\sin(x)$. Don't spend too much time on this proof; we aren't going to use it for anything.

Два заключенных в скобки термина в правой части этого выражения - ряд Тейлора для $\cos(x)$ и $\sin(x)$. Не тратьте слишком много времени на это доказательство; мы не идем к тому, чтобы использовать это для чего-нибудь.

Rewriting Eq. 30-10 using Euler's relation results in the most common way of expressing a complex number in polar notation, a **complex exponential**:

При перезаписи уравнения 30-10 используя отношение Эйлера приводит к наиболее обычному пути выражения комплексного числа в полярной системе обозначений, **комплексная(сложная) показательная функция**:

EQUATION 30-12
Exponential form of complex numbers. The rectangular form, on the left, is equal to the exponential polar form, on the right.

$$a + jb = M e^{j\theta}$$

УРАВНЕНИЕ 30-12
Показательная форма комплексных чисел. Прямоугольная форма, слева, является равной показательной полярной форме, справа.

Complex numbers in this exponential form are the backbone of DSP mathematics. Start your understanding by memorizing Eqs. 30-8 through 30-12. A strong advantage of using this exponential polar form is that it is very simple to multiply and divide complex numbers:

Комплексные числа в этой показательной форме - основа математики ЦОС. Запустите ваше понимание, запоминая уравнения 30-8 до 30-12. Сильное преимущество использования этой показательной полярной формы состоит в том, что очень просто умножать и делить комплексные числа:

УРАВНЕНИЕ 30-13
Умножение комплексных чисел.

$$M_1 e^{j\theta_1}\, M_2 e^{j\theta_2} = M_1 M_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

УРАВНЕНИЕ 30-14
Деление комплексных чисел.

$$\frac{M_1 e^{j\theta_1}}{M_2 e^{j\theta_2}} = \left[\frac{M_1}{M_2}\right] e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

That is, complex numbers in polar form are multiplied by multiplying their magnitudes and adding their angles. The easiest way to perform addition and subtraction in polar form is to convert the numbers to rectangular form, perform the operation, and reconvert back into polar. Complex numbers are usually expressed in rectangular form in computer routines, but in polar form when writing and manipulating equations. Just as *Re*( ) and *Im*( ) are used to extract the rectangular components from a complex number, the operators *Mag*( ) and *Phase*( ) are used to extract the polar components. For example, if, then *Mag*(*A*) = 5 and *Phase*(*A*) = π/7.

То есть комплексные числа в полярной форме умножены, умножая их величины и прибавляя(складывая) их углы. Самый простой способ исполнять сложение и вычитание(субтракцию) в полярной форме состоит в том, чтобы преобразовать числа в прямоугольную форму, исполнять операцию, и повторно преобразовывать назад в полярную. Комплексные числа обычно выражаются в прямоугольной форме в компьютерных подпрограммах, но в полярной форме при записи и управлении уравнениями. Также, как *Re*( ) и *Im*( )используются, чтобы извлечь прямоугольные компоненты из комплексного числа, операторы *Mag*( ) и *Phase*( ) используются, чтобы извлечь полярные компоненты. Например, если = $A = 5e^{j\pi/7}$, тогда *Mag*(*A*) = 5 и *Phase*(*A*) = π/7.

Using Complex Numbers by Substitution
Использование Комплексных чисел замещением(подстановкой)

Let's summarize where we are at. Solutions to common algebraic equations often contain the square-root of a negative number. These are called *complex numbers*, and represent solutions that cannot exist in the world as we know it. Complex numbers are expressed in one of two forms: $a + bj$ (rectangular), or $Me^{j\theta}$ (polar), where j is a symbol representing $\sqrt{-1}$. Using either notation, a single complex number contains two separate pieces of information, either a - b, or M - θ. In spite of their elusive nature, complex numbers follow mathematical laws that are similar (or identical) to those governing ordinary numbers.

Давайте суммировать, где мы - в. Решения обычных алгебраических уравнений часто содержат квадратный корень отрицательного числа. Они называются комплексными числами, и представляют решения, которые не могут существовать в мире, поскольку мы знаем это. Комплексные числа выражены в одной из двух форм: $a + bj$ (прямоугольной), или $Me^{j\theta}$ (полярной), где j - представление символа $\sqrt{-1}$. Используя или система обозначений, единственное(отдельное) комплексное число содержит две отдельных части информации, $a - b$, или M - θ. Несмотря на их неуловимый характер(природу), комплексные числа следуют за математическими законами, которые являются аналогичными (или идентичными) законам управляющим обычными числами.

This describes what complex numbers are and how they fit into the world of pure mathematics. Our next task is to describe ways they are useful in science and engineering problems. How is it possible to use a mathematics that has no connection with our everyday experience? The answer: *If the tool we have is a hammer, make the problem look like a nail.* In other words, we *change* the physical problem into a complex number form, manipulate the complex numbers, and then *change* back into a physical answer.

Это описывает то, чем комплексные числа являются и как они вписываются в мир чистой математики. Наша следующая задача состоит в том, чтобы описать пути, которыми они являются полезными в науке и технических проблемах. Как возможно использовать математику, которая не имеет никакой связи с нашим каждодневным опытом? Ответ: *Если инструмент, который мы имеем - молоток, заставим проблему напоминать гвоздь*. Другими словами, мы заменяем физическую проблему в форму комплексного числа, управляем комплексными числами, и затем изменяем назад в физический ответ(смысл).

There are two ways that physical problems can be represented using complex numbers: a simple method of **substitution**, and a more elegant method we will call **mathematical equivalence**. Mathematical equivalence will be discussed in the next chapter on the *complex Fourier transform*. The remainder of this chapter is devoted to substitution.

Имеются два пути, которыми физические проблемы могут быть представлены, используя комплексные числа: простой метод замещения(подстановки), и более изящный метод называемый **математическая эквивалентность**. Математическая эквивалентность будет обсуждена в следующей главе по *комплексное преобразование Фурье*. Остаток этой главы посвящен замене(подстановке).

Substitution takes two real physical parameters and places one in the real part of the complex number and one in the imaginary part. This allows the two values to be manipulated as a single entity, i.e., a single complex number. After the desired mathematical operations, the complex number is separated into its real and imaginary parts, which again correspond to the physical parameters we are concerned with.

Замещение(подстановка) берет два реальных(вещественных) физических параметра и размещает один в вещественную часть комплексного числа и один в мнимую часть. Это позволяет двум значениям управляться как единому объекту, то есть, отдельное комплексное число. После желательных математических операций, комплексное число отделено в его вещественные и мнимые части, которые снова соответствуют физическим параметрам, мы заинтересованы.

A simple example will show how this works. As you recall from elementary physics, *vectors* can represent such things as: force, velocity, acceleration, etc. For example, imagine a sailboat being pushed in one direction by the wind, and in another direction by the ocean current. The resulting force on the boat is the vector sum of the two individual force vectors. This example is shown in Fig. 30-3, where two vectors, A and B, are added through the parallelogram law, resulting in C.

Простой пример покажет, как это работает. Как Вы помните из элементарной физики, векторы могут представлять такие вещи как: сила, скорость, ускорение, и т.д. Например, вообразите парусную шлюпку, помещаемую в одном направлении ветром, и в другом направлении океаническим течением. Заканчивающаяся сила на лодке - векторная сумма из двух индивидуальных векторов силы. Этот пример показывается в рис. 30-3, где два вектора, A и B, сложены через закон параллелограмма, приводя к C.

We can represent this problem with complex numbers by placing the east/west coordinate into the real part of a complex number, and the north/south coordinate into the imaginary part. This allows us to treat each vector as a single complex number, even though it is composed of two parts. For instance, the force of the wind, vector A, might be in the direction of 2 parts to the east and 6 parts to the north, represented as the complex number: $2 + 6j$. Likewise, the force of the ocean current, vector B, might be in the direction of 4 parts to the east and 3 parts to the south, represented as the complex number: $4 - 3j$. These two vectors can be added via Eq. 30-1, resulting in the complex number representing vector C: $6 + 3j$. Converting this back into a physical meaning, the combined force on the sailboat is in the direction of 6 parts to the north and 3 parts to the east.

Мы можем представлять эту проблему с комплексными числами, помещая восток/запад координату в действительную часть комплексного числа, и север/юг координату в мнимую часть. Это позволяет нам обрабатывать каждый вектор как цельное комплексное число, даже притом, что оно составлено из двух частей. Например, сила ветра, вектор A, могла бы быть в направлении 2 части на восток и 6 частей на север, представленный как комплексное число: $2 + 6j$. Аналогично, сила течения океана, вектор B, могла бы быть в направлении 4 части на восток и 3 части на юг, представленной как комплексное число: $4 - 3j$. Эти два вектора могут быть сложены через уравнение 30-1, приводя к комплексному числу, представляющему вектор C: $6 + 3j$. Преобразовывая эту заднюю часть в физическое значение, объединенная сила на парусной шлюпке - в направлении 6 частей на север и 3 части на восток.

Could this problem be solved without complex numbers? Of course! The complex numbers merely provide a formalized way of keeping track of the *two* components that form a *single* vector. The idea to remember is that some physical problems can be converted into a complex form by simply adding a j to one of the components. Converting back to the physical problem is nothing more than dropping the j. This is the essence of the *substitution* method.

Эта проблема могла быть решена без комплексных чисел? Конечно! Комплексные числа просто обеспечивают формализованный путь слежения за двумя компонентами, которые формируют единственный(отдельный) вектор. Идея помнить состоит в том, что некоторые физические проблемы могут быть преобразованы в комплексную форму, просто прибавляя j к одному из компонентов. Преобразование назад к физической проблеме не ничто больше чем понижение j. Это - сущность метода *замещения*(подстановки).

Here's the rub. How do we know that the rules and laws that apply to complex mathematics are the same rules and laws that apply to the original physical problem? For instance, we used Eq. 30-1 to add the force vectors in the sailboat problem. How do we know that the addition of complex numbers provides the same result as the addition of force vectors? In most cases, we know that complex mathematics can be used for a particular application because *someone else* said it does. Some brilliant and well respected mathematician or engineer worked out the details and published the results. The point to remember is that we cannot substitute just *any* problem into a complex form and expect the answer to make sense. We must stick to applications that have been shown to be applicable to complex analysis.

Имеется препятствие(затруднение). Как мы знаем, что правила и законы, которые обращаются к комплексной математике - те же самые правила и законы, которые обращаются к первоначальной физической проблеме? Например, мы использовали уравнение, 30-1, чтобы сложить векторы силы в проблеме с парусной шлюпкой. Как мы знаем, что сложение комплексных чисел обеспечивает тот же самый результат как сложение векторов силы? В большинстве случаев, мы знаем, что комплексная математика может использоваться для специфического приложения, потому что кто - то еще сказал, что это делает. Некоторый блестящий и сильно уважаемый математик или инженер разработал подробности и издал результаты. Пункт, чтобы помнить - то, что мы не можем заменять только любую проблему в комплексную форму и ожидать, что ответ будет иметь смысл. Мы должны придерживаться приложений, которые показались, чтобы быть применимыми к комплексному анализу.

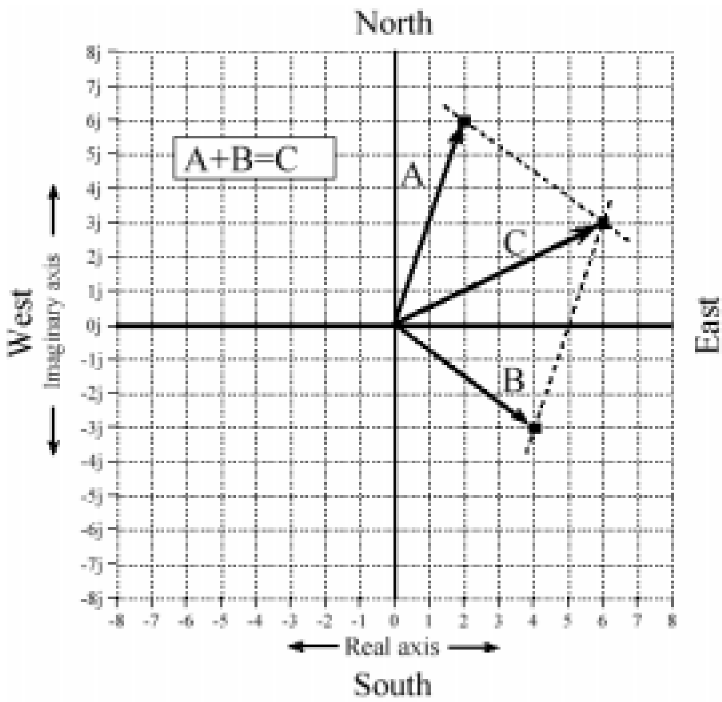

FIGURE 30-3
Adding vectors with complex numbers. The vectors A & B represent forces measured with respect to north/south and east/west. The east/west dimension is replaced by the real part of the complex number, while the north/south dimension is replaced by the imaginary part. This substitution allows complex mathematics to be used with an entirely *real* problem.

РИСУНОК 30-3
Сложение векторов с комплексными числами. Векторы А и В представляют силы, измеренные относительно севера/юга и востока/запада. Восток/запад измерение заменено вещественной частью комплексного числа, в то время как север/юг измерение заменено мнимой частью. Эта замена позволяет комплексной математике использоваться с полностью реальной(вещественной) проблемой.

Let's look at an example where complex number substitution *does not* work. Imagine that you buy apples for $5 a box, and oranges for $10 a box. You represent this by the complex number: 5 + 10*j*. During a particular week, you buy 6 boxes of apples and 2 boxes of oranges, which you represent by the complex number: 6 + 2*j*. The total price you must pay for the goods is equal to number of items multiplied by the price of each item, that is, (5 + 10*j*) (6 + 2*j*) = 10 + 70*j*. In other words, the complex math indicates you must pay a total of $10 for the apples and $70 for the oranges. The problem is, the answer is completely wrong! The rules of complex mathematics *do not* follow the rules of this particular physical problem.

Давайте рассмотрим пример, где замена комплексного числа не работает. Вообразите, что Вы покупаете яблоки по $5 за ящик, и апельсины по $10 за ящик. Вы представляете это комплексным числом: 5 + 10*j*. В течение специфической недели, Вы покупаете 6 ящиков яблок и 2 ящика апельсинов, которые Вы представляете комплексным числом: 6 + 2*j*. Полная цена, которую Вы должны оплатить за товар, равна числу предметов, умноженных ценой каждого элемента(пункта), то есть (5 + 10*j*) (6 + 2*j*) = 10 + 70*j*. Другими словами, комплексная математика указывает, что Вы должны оплатить общее количество $10 для яблок и $70 для апельсинов. Проблема, ответ полностью неправилен! Правила комплексной математики не следуют за правилами этой специфической физической проблемы.

Complex Representation of Sinusoids
Комплексное Представление Синусоид

Complex numbers find a niche in electronics and signal processing because they are a compact way to represent and manipulate the most useful of all waveforms: sine and cosine waves. The conventional way to represent a sinusoid is: $M\cos(\omega t + \phi)$ or $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ in polar and rectangular notation, respectively. Notice that we are representing frequency by ω, the *natural frequency* in *radians per second*. If it makes you more comfortable, you can replace each ω with $2\pi f$ to make the expressions in hertz. However, most DSP mathematics is written using the shorter notation, and you should become familiar with it. Since it requires two parameters to represent a single sinusoid (i.e., A & B, or M & ϕ), the use of complex numbers to represent these important waveforms is a natural. Using substitution, the change from the conventional sinusoid representation to a complex number is straight-forward. In rectangular form:

Комплексные числа находят нишу в электронике и обработке сигналов, потому что они - компактный способ представлять и управлять наиболее полезными из всех форм волны: синусом и косинусом волны. Обычный способ представлять синусоиду: $M\cos(\omega t + \phi)$ или $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ в полярной и прямоугольной системе обозначений, соответственно. Обратите внимание, что мы представляем частоту ω, *собственная частота* в *радианах в секунду*. Если это делает Вас более удобными, Вы можете заменять каждого ω с $2\pi f$, чтобы делать выражение в герцах. Однако, большинство математики ЦОС написано, используя более короткую систему обозначений, и Вы должны ознакомиться с ней. Так как это требует, чтобы два параметра представили единственную(отдельную) синусоиду (то есть, A и B, или M и ϕ), использование комплексных чисел, чтобы представить эти важные формы волны - бекар. Используя замещение, изменение от обычного представления синусоиды в комплексное число прямо(straight-forward). В прямоугольной форме:

$$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \rightleftarrows a + jb$$

(Обычное представление) (комплексное число)

where $A \Leftarrow a$, and $B \Leftarrow -b$. Put in words, the amplitude of the cosine wave becomes the real part of the complex number, while the *negative* of the sine wave's amplitude becomes the imaginary part. It is important to understand that this is *not* an equation, but merely a way of letting a complex number *represent* a sinusoid. This substitution also can be applied in polar form:

Где, $A \Leftarrow a$, и $B \Leftarrow -b$. Излагая в словах, амплитуда волны косинуса становится вещественной частью комплексного числа, в то время как *негатив* амплитуды синусоидальной волны становится мнимой частью. Важно понять, что это - не уравнение, но просто путь разрешения комплексному числу представлять синусоиду. Эта замена также может применяться в полярной форме:

$$M\cos(\omega t + \phi) \rightleftarrows Me^{j\theta}$$

(Обычное представление) (комплексное число)

where $M \Leftarrow M$, and $\theta \Leftarrow -\phi$. In words, the polar notation substitution leaves the magnitude the same, but changes the sign of the phase angle.

Где, $M = M$ и $\theta = -\phi$. В словах, полярная замена системы обозначений оставляет величину той же самой, но изменяет знак фазового угла.

Why change the sign of the imaginary part & phase angle? This is to make the substitution appear in the same form as the *complex Fourier transform* described in the next chapter. The *substitution* techniques of this chapter gain nothing from this sign change, but it is almost always done to keep things consistent with the more advanced methods.

Почему изменяется знак мнимой части и фазового угла? Это должно заставить замену появиться в той же самой форме как *комплексное преобразование Фурье*, описанное в следующей главе. Методы *замещения* этой главы не получают ничто от этой замены знака, но это почти всегда делается, чтобы сохранить вещи совместимыми с более продвинутыми методами.

Using complex numbers to represent sine and cosine waves is a common technique in electrical circuit analysis and DSP. This is because many (but not all) of the rules and laws governing complex numbers are the same as those governing sinusoids. In other words, we can represent the sine and cosine waves with complex numbers, manipulate the numbers in various ways, and have the resulting answer match the way the sinusoids behave.

Использование комплексных чисел, чтобы представить синус и волны косинуса - обычная методика в теории цепей и ЦОС. Это - то, потому что много (но не все) правил и законов, управляющих комплексными числами - те же самые как те, управляющие синусоидами. Другими словами, мы можем представлять синус и косинуса волны комплексными числами, управлять числами различными способами, и иметь заканчивающийся ответ, соответствующий пути(образу), которым синусоиды ведут себя.

However, we must be careful to use only those mathematical operations that mimic the physical problem being represented (sinusoids in this case). For example, suppose we use the complex variables, *A* and *B*, to represent two sinusoids of the same frequency, but with different amplitudes and phase shifts. When the two complex numbers are *added*, a third complex number is produced. Likewise, a third sinusoid is created when the two sinusoids are added. As you would hope, the third complex number represents the third sinusoid. The complex addition matches the physical system.

Однако, мы должны быть внимательным, чтобы использовать только те математические операции, которые подражают физической представляемой проблеме (синусоиды в этом случае). Например, предположите, что мы используем комплексные переменные, *A* и *B*, чтобы представить две синусоиды той же самой частоты, но с различными амплитудами и сдвигами фаз. Когда эти два комплексных числа сложены, третье комплексное число произведено. Аналогично, третья синусоида создана, когда эти две синусоиды сложены. Поскольку Вы надеялись бы, третье комплексное число представляет третью синусоиду. Комплексное сложение соответствует физической системе.

Now, imagine multiplying the complex numbers *A* and *B*, resulting in another complex number. Does this match what happens when the two sinusoids are multiplied? No! Multiplying two sinusoids does *not* produce another sinusoid. Complex multiplication fails to match the physical system, and therefore cannot be used.

Теперь, вообразите умножение комплексных чисел *A* и *B*, приводящее к другому комплексному числу. Это соответствует тому, что случается, когда эти две синусоиды умножены? *Нет*! Умножение двух синусоид не производит другую синусоиду. Комплексное умножение будет не в состоянии соответствовать физической системе, и поэтому не может использоваться.

Fortunately, the valid operations are clearly defined. Two conditions must be satisfied. First, all of the sinusoids must be at the *same frequency*. For example, if the complex numbers: $1 + 1j$ and $2 + 2j$ represent sinusoids at the same frequency, then the sum of the two sinusoids is represented by the complex number: $3 + 3j$. However, if $1 + 1j$ and $2 + 2j$ represent sinusoids with different frequencies, there is nothing that can be done with the complex representation. In this case, the sum of the complex numbers, $3+ 3j$, is meaningless.

К счастью, справедливые операции ясно определены. Два условия должны быть удовлетворены. Во первых, все синусоиды должны быть в той же самой частоте. Например, если комплексные числа: $1+1j$ и $2+2j$ представляют синусоиды одной и той частоты, тогда сумма этих двух синусоид представлена комплексным числом: $3+3j$. Однако, если $1+1j$ и $2+2j$ представляют синусоиды с различными частотами, не имеется ничего, что может быть сделано с комплексным представлением. В этом случае, сумма комплексных чисел, $3+3j$, является бессмысленной.

In spite of this, frequency can be left as a variable when using complex numbers, but it must be the *same* frequency everywhere. For instance, it is perfectly valid to add: $2\omega + 3\omega j$ and $3\omega + 1j$, to produce: $5\omega + (3\omega + 1)j$. These represent sinusoids where the amplitude and phase vary as frequency changes. While we do not know *what* the particular frequency is, we do know that it is the *same* everywhere, i.e., ω.

Несмотря на это, частота может быть оставлена как переменная при использовании комплексных чисел, но это должно быть та же самая частота всюду. Например, это совершенно имеет силу, чтобы сложить: $2\omega + 3\omega j$ and $3\omega + 1j$, чтобы произвести: $5\omega + (3\omega + 1)j$. Они представляют синусоиды, где амплитуда и фаза изменяются с изменением частоты. В то время как мы не знаем, какова специфическая частота, мы знаем, что это - тот же самый всюду, то есть, ω.

The second requirement is that the operations being represented must be *linear*, as discussed in Chapter 5. For instance, sinusoids can be combined by addition and subtraction, but not by multiplication or division. Likewise, systems may be amplifiers, attenuators, high or low-pass filters, etc., but not such actions as: squaring, clipping and thresholding. Remember, even convolution and Fourier analysis are only valid for linear systems.

Второе требование - то, что представляемые операции должны быть линейны, как обсуждено в главе 5. Например, синусоиды могут быть объединены сложением и вычитанием(субтракцией), но не умножением или делением. Аналогично, системы могут быть усилители, аттенюаторы, фильтры высоких нижних частот, и т.д., но не такие действия как: возведение в квадрат, отсечение(срезание; отбрасывание; ограничение(односторонне)) и пороговая обработка. Помните, четная свертка и анализ Фурье имеют силу только для линейных систем.

Complex Representation of Systems
Комплексное Представление Систем

Figure 30-4 shows an example of using complex numbers to represent a sinusoid passing through a linear system. We will use continuous signals for this example, although discrete signals are handled the same way. Since the input signal is a sinusoid, and the system is linear, the output will also be a sinusoid, and at the same frequency as the input. As shown, the example input signal has a conventional representation of: $3\cos(\omega t + \pi/4)$, clipping or the equivalent expression: $2.1213 \cos(\omega t) - 2.1213 \sin(\omega t)$. When represented by a complex number this becomes: $3e^{-j\pi/4}$ or $2.1213 + j2.1213$. Likewise, the conventional representation of the output is: $1.5\cos(\omega t - \pi/8)$, or in the alternate form: $1.3858\cos(\omega t) + 0.5740\sin(\omega t)$. This is represented by the complex number: $1.5e^{j\pi/8}$ or $1.3858 - j0.5740$.

Рисунок 30-4 показывает пример использования комплексных чисел, чтобы представить синусоиду, проходящую через линейную систему. Мы будем использовать непрерывные сигналы для этого примера, хотя дискретные сигналы обработаны тем же самым путем. Так как входной сигнал - синусоида, и система линейна, выход будет также синусоида, и в той же самой частоте как ввод. Как показано, входной сигнал примера имеет обычное представление: $3\cos(\omega t + \pi/4)$, или эквивалентное выражение: $2.1213\cos(\omega t) - 2.1213\sin(\omega t)$. Когда представлено комплексным числом это становится: $3e^{-j\pi/4}$ или $2.1213 + j2.1213$. Аналогично, обычное представление выхода: $1.5\cos(\omega t - \pi/8)$, или в дополнительной форме: $1.3858\cos(\omega t) + 0.5740\sin(\omega t)$. Это представлено комплексным числом: $1.5e^{j\pi/8}$ или $1.3858 - j0.5740$.

The system's characteristics can also be represented by a complex number. The magnitude of the complex number is the ratio between the magnitudes of the input and output (i.e., M_{out}/M_{in}). Likewise, the angle of the complex number is the *negative* of the difference between the input and output angles (i.e., $-[\Phi_{out} - \Phi_{in}]$). In the example used here, the system is described by the complex number, $0.5^{ej3\pi/8}$. In other words, the amplitude of the sinusoid is reduced by 0.5, while the phase angle is changed by $-3\pi/8$.

Характеристики системы могут также быть представлены комплексным числом. Величина комплексного числа - отношение между величинами ввода и вывода (то есть, M_{out}/M_{in}). Аналогично, угол комплексного числа - *негатив* различия между углами ввода и вывода (то есть, $-[\Phi_{out} - \Phi_{in}]$). В примере, используемом здесь, система описана комплексным числом, $0.5^{ej3\pi/8}$. Другими словами, амплитуда синусоиды сокращена 0.5, в то время как фазовый угол изменен $-3\pi/8$.

The complex number representing the system can be converted into rectangular form as: $0.1913 - j\,0.4619$, but we must be careful in interpreting what this means. It does *not* mean that a sine wave passing through the system is changed in amplitude by 0.1913, nor that a cosine wave is changed by -0.4619. In general, a pure sine or cosine wave entering a linear system is converted into a *mixture* of sine and cosine waves.

Комплексное число, представляющее систему может быть преобразовано в прямоугольную форму как: $0.1913 - j\,0.4619$, но мы должны быть внимательным в интерпретации что это означает. Это *не подразумевает*, что синусоидальная волна, проходящая через систему, изменена в амплитуде 0.1913, ни то, что волна косинуса изменена -0.4619. Вообще, чистый синус или косинус волны ввода в линейной системе преобразованы в смесь волн косинуса и синуса.

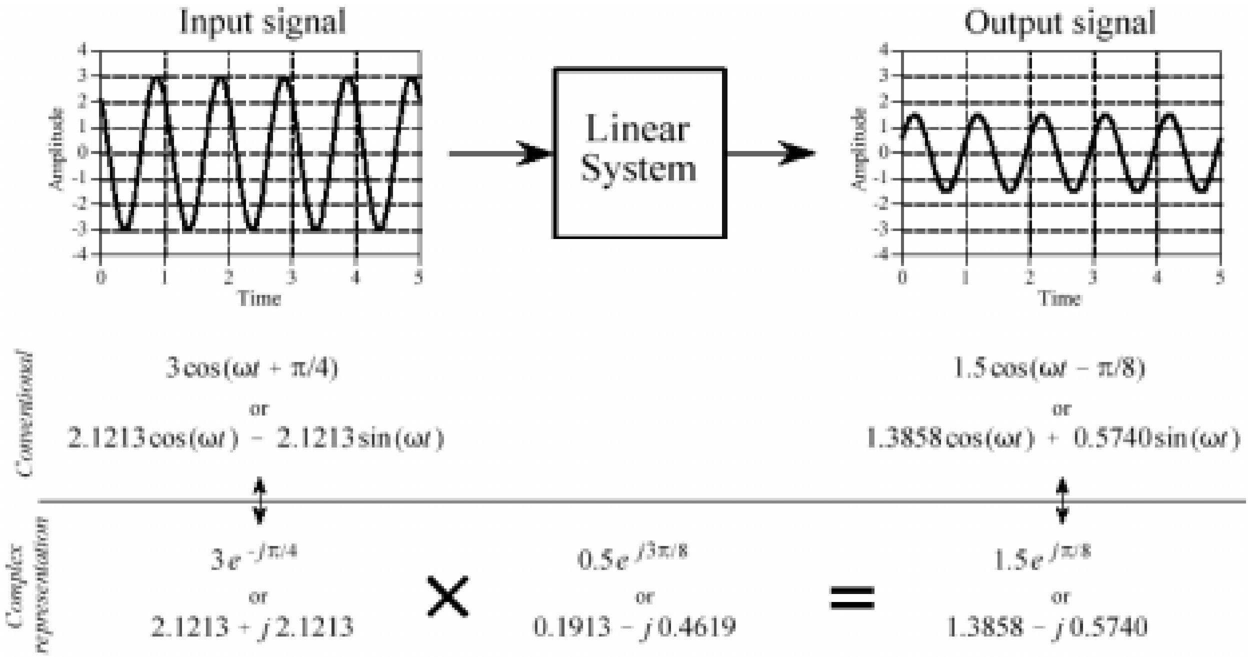

FIGURE 30-4
Sinusoids represented by complex numbers. Complex numbers are popular in DSP and electronics because they are a convenient way to represent and manipulate *sinusoids*. As shown in this example, sinusoidal input and output signals can be represented as complex numbers, expressed in either polar or rectangular form. In addition, the *change* that a linear system makes to a sinusoid can also be expressed as a complex number.

РИСУНОК 30-4. Синусоиды, представленные комплексными числами.
Комплексные числа популярны в ЦОС и электронике, потому что они - удобный способ представлять и управлять синусоидами. Как показано в этом примере, синусоидальные сигналы ввода и вывода могут быть представлены как комплексные числа, выраженные или в полярной или в прямоугольной форме. Кроме того, изменение, которое линейная система делает к синусоиде, может также быть выражено как комплексное число.

Fortunately, the complex math automatically keeps track of these cross-terms. When a sinusoid passes through a linear system, the complex numbers representing the input signal and the system are *multiplied*, producing the complex number representing the output. If any two of the complex numbers are known, the third can be found. The calculations can be carried out in either polar or rectangular form, as shown in Fig. 30-4.

К счастью, комплексная математика автоматически следит за этими пересекающимися терминами. Когда проходы синусоиды через линейную систему, комплексные числа, представляющие входной сигнал и систему *умножены*, производя комплексное число, представляющее выход. Если любое двух из комплексных чисел известно, третье может быть найдено. Вычисления могут быть выполнены или в полярной или в прямоугольной форме, как показано в рис. 30-4.

In previous chapters we described how the Fourier transform decomposes a signal into cosine and sine waves. The amplitudes of the cosine waves are called the *real part*, while the amplitudes of the sine waves are called the *imaginary part*. We stressed that these amplitudes are ordinary numbers, and the terms *real* and *imaginary* are just names used to keep the two separate.

Now that complex numbers have been introduced, it should be quite obvious were the names come from. For example, imagine a 1024 point signal being decomposed into 513 cosine waves and 513 sine waves. Using substitution, we can represent the spectrum by 513 complex numbers. However, don't be misled into thinking that this is the *complex Fourier transform*, the topic of Chapter 31. This is still the *real Fourier transform*; the spectrum has just been placed in a complex format by using substitution.

В предыдущих главах мы описали, как преобразование Фурье анализирует(расчленяет) сигнал в волны косинуса и синуса. Амплитуды волн косинуса называются *вещественной частью*, в то время как амплитуды синусоидальных волн *называются мнимой* частью. Мы подчеркнули, что эти амплитуды - обычные числа, и термины, *вещественные* и *мнимые* - только названия, обычно используемое сохранять эти два отдельно. Теперь, когда комплексные числа были представлены, это должно быть весьма очевидно, откуда названия, исходят. Например, вообразите сигнал из 1024 точек, расчлененный в волны 513 косинусов и 513 синусоидальных волн. Используя замещение, мы можем представлять спектр 513 комплексными числами. Однако, не будьте введены в заблуждение думая, что это является комплексным преобразованием Фурье, тема главы 31. Это - все еще вещественное преобразование Фурье; спектр только что был помещен в комплексный формат, используя замещение.

Electrical Circuit Analysis
Теория электрических цепей(схем)

This method of substituting complex numbers for cosine & sine waves is called the **Phasor transform**. It is the main tool used to analyze networks composed of resistors, capacitors and inductors. [More formally, electrical engineers define the pharos transform as multiplying by the complex term: $e^{j\omega t}$ and taking the real part. This allows the procedure to be written as an equation, making it easier to deal with in mathematical work. “Substitution” achieves the same end result, but is less elegant].

Этот метод замены комплексных чисел для волн косинуса и волн синуса называется **векторной трансформантой**. Это - основной инструмент, обычно используемый для анализа цепей, составленных из резисторов, конденсаторов и катушек индуктивности. [Более формально, инженеры - электрики определяют векторную трансформанту как умножение комплексным термином: $e^{j\omega t}$ и взятие вещественной части. Это позволяет процедуре быть написанной, как уравнение, облегчая возможность имеет дело в математической работе. "Подстановка" достигает того же самого конечного результата, но менее изящна].

The first step is to understand the relationship between the current and voltage for each of these devices. For the resistor, this is expressed in Ohm's law: $v = iR$, where i is the instantaneous current through the device, v is the instantaneous voltage across the device, and R is the resistance. In contrast, the capacitor and inductor are governed by the differential equations: $i = C\, dv/dt$, and $v = L\, di/dt$, where C is the capacitance and L is the inductance. In the most general method of circuit analysis, these nasty differential equations are combined as dictated by the circuit configuration, and then solved for the parameters of interest. While this will answer *everything* about the circuit, the math can become a real mess.

Первый шаг необходимо понять отношения между током и напряжением для каждого из этих устройств. Для резистора, это выражено в Законе Ома: $v = iR$, где i - мгновенный ток через устройство, v - мгновенное напряжение поперек устройства, и R - сопротивление.

Напротив, конденсатор и катушка индуктивности управляются дифференциально-разностными уравнениями: $i = C\,dv/dt$, и $v = L\,di/dt$, где C - емкость и L - индуктивность. В большинстве общих методов схемного анализа, эти противные дифференциально-разностные уравнения объединены, как продиктовано конфигурацией схемы, и затем решены для параметров, представляющих интерес. В то время как это ответит, что все относительно схемы, математика может стать реальным(вещественным) беспорядком.

This can be greatly simplified by restricting the signals to be sinusoids. By representing these sinusoids with complex numbers, the difficult *differential* equations can be directly replaced with much simpler *algebraic* equations. Figure 30-5 illustrates how this works. We treat each of these three components (resistor, capacitor & inductor) as a *system*. The input to the system is the sinusoidal current through the device, while the output is the sinusoidal voltage across its two terminals. This means we can represent the input and output of the system by the two complex variables: I (for current) and V (for voltage), respectively. The relation between the input and output can also be expressed by a complex number. This complex number is called the **impedance**, and is given the symbol: Z. This means:

Это может быть очень упрощено, ограничивая сигналы, чтобы быть синусоидами. Представляя эти синусоиды комплексными числами, трудные *дифференциальные* уравнения могут быть непосредственно заменены намного более простыми *алгебраическими* уравнениями. Рисунок 30-5 иллюстрирует, как это работает. Мы обрабатываем каждый из этих трех компонентов (резистор, конденсатор и катушка индуктивности) как *систему*. Ввод к системе - синусоидальный ток через устройство, в то время как выход - синусоидальное напряжение поперек его двух терминалов. Это означает, что мы можем представлять ввод и вывод системы этими двумя комплексными переменными: I (для тока) и V (для напряжения), соответственно. Отношение между вводом и выводом может также быть выражено комплексным числом. Это комплексное число называется **импедансом**, и дается символ: Z. Это означает:

$$I \times Z = V$$

In words, the complex number representing the sinusoidal voltage is equal to the complex number representing the sinusoidal current multiplied by the impedance (another complex number). Given any two, the third can be found. In polar form, the magnitude of the impedance is the ratio between the amplitudes of V and I. Likewise, the phase of the impedance is the phase difference between V and I.

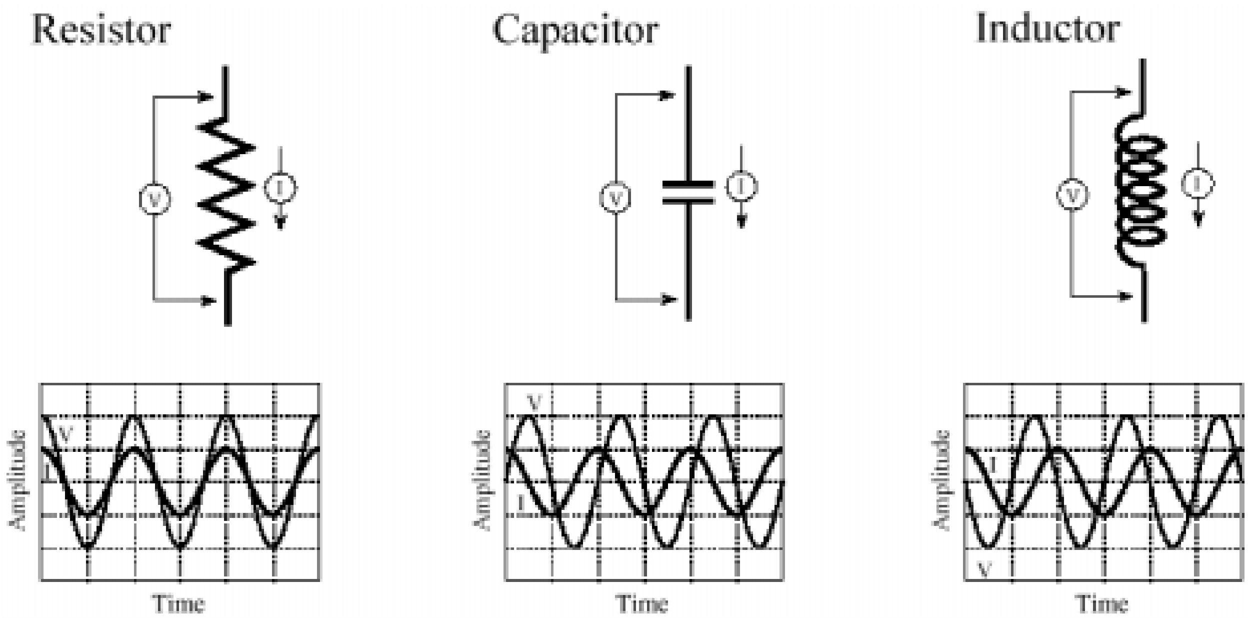

FIGURE 30-5
Definition of impedance. When sinusoidal voltages and currents are represented by complex numbers, the ratio between the two is called the *impedance*, and is denoted by the complex variable, Z. Resistors, capacitors and inductors have impedances of R, $-j/\omega C$ and $j\omega L$, respectively.
РИСУНОК 30-5. Определение импеданса.
Когда синусоидальные напряжения и токи представлены комплексными числами, отношение(коэффициент) между этими двумя называется *импедансом*, и обозначено комплексной переменной, Z. Резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности имеют импедансы R, $-j/\omega C$ и $j\omega L$, соответственно.

This relation can be thought of as *Ohm's law for sinusoids*. Ohms's law ($v = iR$) describes how the *resistance* relates the instantaneous current and voltage in a resistor. When the signals are sinusoids represented by complex numbers, the relation becomes: $V = IZ$. That is, the *impedance* relates the current and voltage. Resistance is an ordinary number, since it deals with two ordinary numbers. Impedance is a complex number, since it relates two complex numbers. Impedance contains more information than resistance, because it dictates both the amplitudes *and* the phase angles.

О этом отношении можно думать как *Закон Ома для синусоид*. Закон Ома ($v = iR$) описывает, как *сопротивление* связано с мгновенным током и напряжением на резисторе. Когда сигналы - синусоиды, представлены комплексными числами, отношение становится: $V = IZ$. То есть импеданс связывает ток и напряжение. Сопротивление - обычное число, так как это имеет дело с двумя обычными числами. Импеданс - комплексное число, так как это связывает два комплексных числа. Импеданс содержит подробную информацию, чем сопротивление, потому что это диктует, и амплитуды и фазовые углы.

From the differential equations that govern their operation, it can be shown that the impedance of the resistor, capacitor, and inductor are: R, $-j/\omega C$, and $j\omega L$, respectively. As an example, imagine that the current in each of these components is a unity amplitude cosine wave, as shown in Fig. 30-5. Using substitution, this is represented by the complex number: $1 + 0j$. The voltage across the resistor will be: $V = I\,Z = (1+ 0j)R = R+ 0j$. In other words, a cosine wave of amplitude R. The voltage across the capacitor is found to be: $V = IZ = (1+0j)(-j/\omega C)$. This reduces to: $0 -j/\omega C$, a sine wave of amplitude, $1/\omega C$. Likewise, the voltage across the inductor can be calculated: $V = IZ = (1 + 0j)(jTL)$. This reduces to: $0 + j\omega L$ a negative sine wave of, amplitude, ωL.

От дифференциально-разностных уравнений, которые управляют их операцией, можно показано, что импеданс резистора, конденсатора, и катушки индуктивности: R, $-j/\omega C$, и *jωL,* соответственно. Как пример, вообразите, что ток в каждом из этих компонентов - волна косинуса амплитуды единицы, как показано в рис. 30-5. Используя замену, это представлено комплексным числом: 1 + 0*j*. Напряжение на резисторе будет: *V* = *I Z* = (1+ 0*j)R* = *R*+ 0*j*. Другими словами, волна косинуса амплитуды *R*. Напряжение на конденсаторе найдено, чтобы быть: *V* = *IZ* = (1+0*j*)(-*j*/*ωC*). Это приводит к: 0 -*j*/*ωC*, синусоидальная волна амплитуды, 1/*ωC*. Аналогично, напряжение на катушке индуктивности может быть рассчитано: *V* = *IZ* = (1 + 0*j*)(*jTL*). Это приводит к: 0 + *jωL* отрицательная синусоидальная волна, амплитуда, ω*L*.

The beauty of this method is that *RLC* circuits can be analyzed without having to resort to differential equations. The *impedance* of the resistors, capacitors, and inductors is treated the same as *resistance* in a DC circuit. This includes all of the basic combinations, such as: resistors in series, resistors in parallel, voltage dividers, etc.

Красота этого метода состоит в том, что *RLC* цепи могут быть проанализированы без того, чтобы иметь необходимость прибегать к дифференциальным уравнениям. *Импеданс* резисторов, конденсаторов, и катушек индуктивности обработан тот же самый как *сопротивление* в цепи постоянного тока. Это включает все основные комбинации, типа: последовательные резисторы, параллельные резисторы, делители напряжения, и т.д.

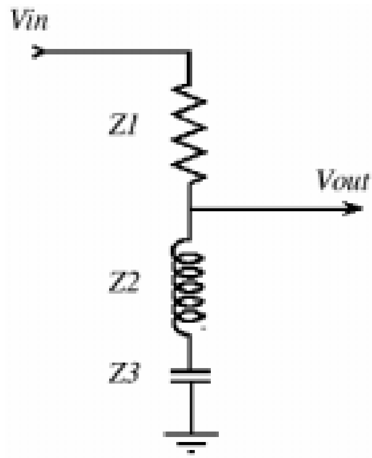

FIGURE 30-6
RLC notch filter. This circuit removes a narrow band of frequencies from a signal. The use of complex substitution greatly simplifies the analysis of this and similar circuits.
РИСУНОК 30-6
RLC фильтр-пробка. Эта схема удаляет узкую полосу частот от сигнала. Использование комплексной замены(замещения) очень упрощает анализ этой и подобных цепей.

As an example, Fig. 30-6 shows an *RLC* circuit called a **notch filter**, used to remove a narrow band of frequencies. For instance, it could eliminate 60 hertz interference in an audio or instrumentation signal. If this circuit were composed of three resistors (instead of the resistor, capacitor and inductor), the relationship between the input and output signals would be given by the voltage divider formula: $v_{out}/v_{in} = (R2 + R3)/(R1 + R2 + R3)$. Since the circuit contains capacitors and inductors, the equation is rewritten with impedances:

Как пример, на рис. 30-6 показана *RLC* схема называемая фильтр-пробка, обычно используемый для удаления узкой полосы частот. Например, это могло устранять интерференцию 60 герц в звуковом или контрольно-измерительном сигнале. Если эта схема была составлена из трех резисторов (вместо резистора, конденсатора и катушки индуктивности), отношения между сигналами ввода и вывода будут даваться формулой делителя напряжения: $v_{out}/v_{in} = (R2 + R3)/(R1 + R2 + R3)$. Так как схема содержит конденсаторы и катушки индуктивности, уравнение перезаписано с импедансами:

$$\frac{Vout}{Vin} = \frac{Z2 + Z3}{Z1 + Z2 + Z3}$$

where: *Vout*, *Vin*, *Z1*, *Z2*, and *Z3* are all complex variables. Plugging in the impedance of each component:
Где: *Vout*, *Vin*, *Z1*, *Z2*, и *Z3* - все комплексные переменные. Подключаемые в импеданс каждого компонента:

$$\frac{Vout}{Vin} = \frac{j\omega L - \dfrac{j}{\omega C}}{R + j\omega L - \dfrac{j}{\omega C}}$$

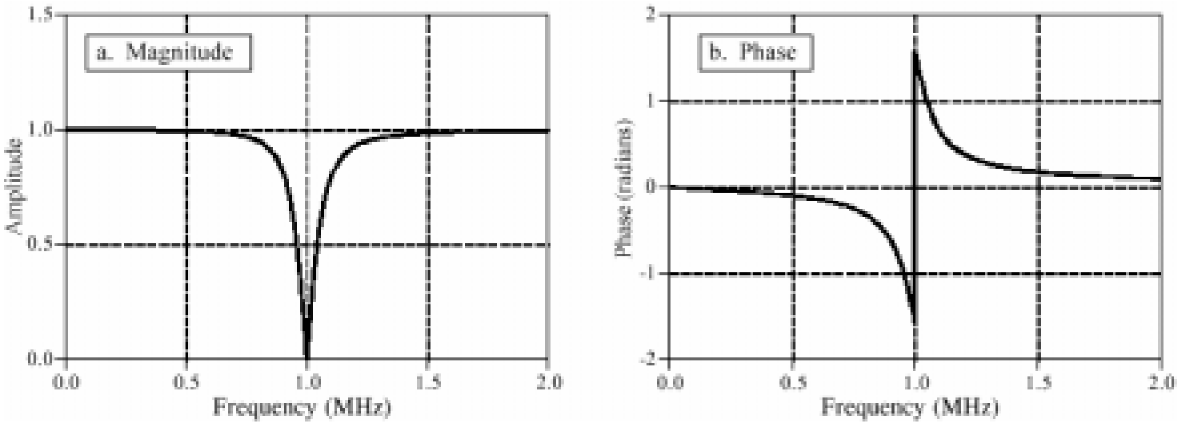

Рисунок 30-7. Частотная характеристика фильтра-пробки. Эти кривые - для компонентов значений: R = 50Ω, C = 470pF, и L = 54 μH.

Next, we crank through the algebra to separate everything containing a *j*, from everything that does not contain a *j*. In other words, we separate the equation into its real and imaginary parts. This algebra can be tiresome and long, but the alternative is to write and solve *differential equations*, an even nastier task. When separated into the real and imaginary parts, the complex representation of the notch filter becomes:

Затем, мы прокручиваем через алгебру, чтобы отделить все содержащее *j*, от всего, что не содержит *j*. Другими словами, мы отделяем уравнение в его вещественные и мнимые части. Эта алгебра может быть утомительна и длинна, но альтернатива должна записывать и решить дифференциальные уравнения, четную более противную задачу. Когда отделено в вещественные и мнимые части, комплексное представление фильтра-пробки становится:

$$\frac{Vout}{Vin} = \frac{k^2}{R^2 + k^2} + j\frac{Rk}{R^2 + k^2}$$

где: $k = \omega L - 1/\omega C$

Lastly, the relation is converted to polar notation, and graphed in Fig. 30-7:
Наконец, отношение преобразовано к полярной системе обозначений, и графику в рис. 30-7:

$$Mag = \frac{\omega L - 1/\omega C}{\left(R^2 + [\,\omega L - 1/\omega C\,]^2\right)^{1/2}} \qquad Phase = \arctan\left[\frac{R}{\omega L - 1/\omega C}\right]$$

The key point to remember from these examples is how *substitution* allows complex numbers to represent real world problems. In the next chapter we will look at a more advanced way to use complex numbers in science and engineering, *mathematical equivalence*.

Ключевой пункт, чтобы помнить от этих примеров - то, как *замена*(*замещение; подстановка*) позволяет комплексным числам представлять реальные(вещественные) мировые проблемы. В следующей главе мы будем смотреть на более преждевременный способ использовать комплексные числа в науке и технике, *математической эквивалентности*.