

CHAPTER
32

The Laplace Transform Преобразование Лапласа

The two main techniques in signal processing, convolution and Fourier analysis, teach that a linear system can be completely understood from its impulse or frequency response. This is a very generalized approach, since the impulse and frequency responses can be of nearly any shape or form. In fact, it is *too* general for many applications in science and engineering. Many of the parameters in our universe interact through *differential equations*. For example, the voltage across an inductor is proportional to the derivative of the current through the device. Likewise, the force applied to a mass is proportional to the derivative of its velocity. Physics is filled with these kinds of relations. The frequency and impulse responses of these systems cannot be arbitrary, but must be consistent with the solution of these differential equations. This means that their impulse responses can only consist of *exponentials* and *sinusoids*. The Laplace transform is a technique for analyzing these special systems when the signals are *continuous*. The z-transform is a similar technique used in the *discrete* case.

Два основных метода в обработке сигналов, свертка и анализ Фурье, учат, что линейная система может быть полностью понята от ее импульса или частотной характеристики. Это - очень обобщенный подход, так как импульс и частотные характеристики могут иметь почти любое очертание или форму. Фактически, это *слишком* общее для многих приложений в науке и технике. Многие из параметров в нашей области взаимодействуют через *дифференциальные уравнения*. Например, напряжение на катушке индуктивности пропорционально к производной тока через устройство. Аналогично, сила, приложенная к массе пропорциональна к производной ее скорости. Физика заполнена этими видами отношений. Частота и импульсные передаточные функции этих систем не могут быть произвольны, но должны быть совместимы с решением этих дифференциально-разностных уравнений. Это означает, что их импульсные передаточные функции могут состоять только из *показательных* функций и *синусоид*. преобразование Лапласа - методика для анализа этих специальных систем, когда сигналы *непрерывны*. Z-трансформанта - подобная методика, используемая в *дискретном* случае.

The Nature of the s-Domain

Характер(природа) s-домена

The Laplace transform is a well established mathematical technique for solving differential equations. It is named in honor of the great French mathematician, Pierre Simon De Laplace (1749-1827). Like all transforms, the Laplace transform changes one signal into another according to some fixed set of rules or equations. As illustrated in Fig. 32-1, the Laplace transform changes a signal in the time domain into a signal in the **s-domain**, also called the **s-plane**. The time domain signal is continuous, extends to both positive and negative infinity, and may be either periodic or aperiodic. The Laplace transform allows the time domain to be *complex*; however, this is seldom needed in signal processing. In this discussion, and nearly all practical applications, the time domain signal is completely real.

Преобразование Лапласа - хорошо установленная математическая методика для решения дифференциальных уравнений. Это названо в честь великого французского математика, Pierre Simon De Laplace (1749-1827). Подобно всем трансформантам, преобразование Лап-

Ласа изменяет один сигнал в другой согласно некоторому установленному набору правил или уравнений. Как иллюстрировано в рис. 32-1, преобразование Лапласа изменяет а сигнал в домене времени в сигнал в **s-домене**, также называемом **s-плоскостью**. Сигнал домена времени непрерывен, простирается и на положительную и на отрицательную бесконечность, и может быть или периодическим или аperiodическим. Преобразование Лапласа позволяет домену времени быть *комплексным*; однако, это редко необходимо в обработке сигналов. В этом обсуждении, и почти во всех практических приложениях, сигналы домена времени полностью вещественны.

As shown in Fig. 32-1, the s-domain is a complex plane, i.e., there are real numbers along the horizontal axis and imaginary numbers along the vertical axis. The distance along the real axis is expressed by the variable, σ , a lower case Greek sigma. Likewise, the imaginary axis uses the variable, ω , the natural frequency. This coordinate system allows the location of any point to be specified by providing values for σ and ω . Using complex notation, each location is represented by the complex variable, s , where: $s = \sigma + j\omega$. Just as with the Fourier transform, signals in the s-domain are represented by capital letters. For example, a time domain signal, $x(t)$, is transformed into an s-domain signal, $X(s)$, or alternatively, $X(\sigma, \omega)$. The s-plane is continuous, and extends to infinity in all four directions.

Как показано в рис. 32-1, s-домен - комплексная плоскость, то есть, имеются вещественные числа по горизонтальной оси и комплексные числа по вертикальной оси. Расстояние по вещественной оси выражено переменной, σ , строчная буква греческая сигма. Аналогично, мнимая ось использует переменную, ω , собственная частота. Эта система координат позволяет расположению любой точки быть определенной, обеспечивая значения для σ и ω . Используя комплексную систему обозначений, каждое расположение представлено комплексной переменной, s , где: $s = \sigma + j\omega$. Также, как с преобразованием Фурье, сигналы в s-домене представлены заглавными буквами. Например, сигнал домена времени, $x(t)$, преобразован в сигнал s-домена, $X(s)$, или альтернативно, $X(\sigma, \omega)$. s-плоскость непрерывна, и простирается в бесконечность во всех четырех направлениях.

In addition to having a *location* defined by a complex number, each point in the s-domain has a *value* that is a complex number. In other words, each location in the s-plane has a real part and an imaginary part. As with all complex numbers, the real & imaginary parts can alternatively be expressed as the magnitude & phase.

В дополнение к наличию *расположения*, определенного комплексным числом, каждая точка в s-домене имеет значение, которое является комплексным числом. Другими словами, каждое расположение в s-плоскости имеет вещественную часть и мнимую часть. Как со всеми комплексными числами, вещественные и мнимые части могут альтернативно быть выражены как величина и фаза.

Just as the Fourier transform analyzes signals in terms of sinusoids, the Laplace transform analyzes signals in terms of sinusoids *and* exponentials. From a mathematical standpoint, this makes the Fourier transform a *subset* of the more elaborate Laplace transform. Figure 32-1 shows a graphical description of how the s-domain is related to the time domain. To find the values along a vertical line in the s-plane (the values at a particular σ), the time domain signal is first multiplied by the exponential curve: $e^{-\sigma t}$. The left half of the s-plane multiplies the time domain with exponentials that *increase* with time ($\sigma < 0$), while in the right half the exponentials *decrease* with time ($\sigma > 0$). Next, take the complex Fourier transform of the exponentially weighted signal. The resulting spectrum is placed along a vertical line in the s-plane, with the top half of the s-plane containing the positive frequencies and the bottom half containing the negative frequen-

cies. Take special note that the values on the y-axis of the s-plane ($\sigma = 0$) are exactly equal to the Fourier transform of the time domain signal.

Так же, как преобразование Фурье анализирует сигналы в терминах синусоид, преобразование Лапласа анализирует сигналы в терминах синусоид и показательных функций. С математической точки зрения, это делает преобразование Фурье *подмножеством* из более сложного преобразования Лапласа. Рисунок 32-1 показывает графическое описание того, как s-домен связан с доменом времени. Находить значения по вертикальной строке в s-плоскости (значения в частности σ), сигнал домена времени сначала умножен на экспоненту: $e^{-\sigma t}$. Левая половина s-плоскости умножает домен времени с показательными функциями, которые увеличиваются со временем ($\sigma < 0$), в то время как в правой половине показательных функций уменьшаются со временем ($\sigma > 0$). Затем, берите комплексное преобразование Фурье по экспоненте взвешенного сигнала. Заканчивающийся спектр помещен по вертикальной линии в s-плоскости, с высшей половиной s-плоскости, содержащей положительные частоты и нижней половиной содержащей отрицательные частоты. Заметьте особо, что значения на оси у s-плоскости ($\sigma = 0$) точно равно преобразованию Фурье сигнала домена времени.

As discussed in the last chapter, the complex Fourier Transform is given by:
Как обсуждено в прошлой главе, комплексное преобразование Фурье дается:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

This can be expanded into the Laplace transform by first multiplying the time domain signal by the exponential term:

Это может быть расширено в преобразование Лапласа первым умножением сигнал домена времени на термин показателя:

$$X(\sigma, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

While this is not the simplest form of the Laplace transform, it is probably the best description of the strategy and operation of the technique. To place the equation in a shorter form, the two exponential terms can be combined:

В то время как это - не самая простая форма преобразования Лапласа, это - вероятно лучшее описание стратегии и операции методики. Чтобы размещать уравнение в более короткую форму, термины двух показателей могут быть объединены:

$$X(\sigma, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma - j\omega)t} dt$$

Finally, the *location* in the complex plane can be represented by the complex variable, s , where $s = \sigma + j\omega$. This allows the equation to be reduced to an even more compact expression:

Наконец, расположение в комплексной плоскости может быть представлено комплексной переменной, s , где $s = \sigma + j\omega$. Это позволяет уравнению быть сокращенным к даже более компактному выражению:

УРАВНЕНИЕ 32-1

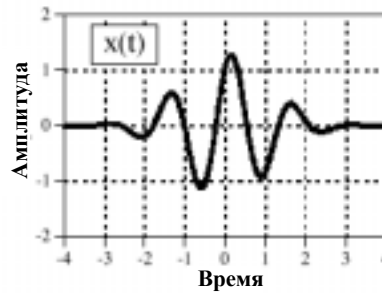
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО ПО ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

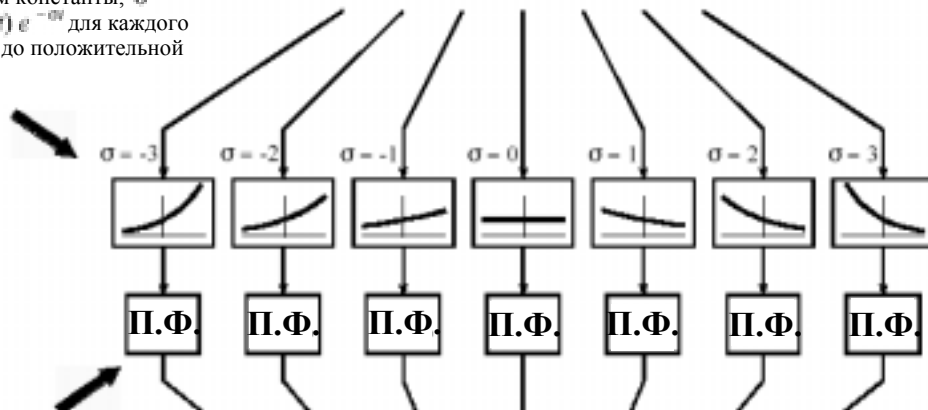
Преобразование Лапласа. Это уравнение определяет, как сигнал домена времени, $x(t)$, связан с сигналом s-домена, $X(s)$. Переменные s-домена, s , и $X(s)$, являются комплексными. В то время как домен времени может быть комплексен, обычно это вещественно.

0

ШАГ 1
Старт с сигналом домена времени называемым $x(t)$



ШАГ 2
Умножьте сигнал домена времени на бесконечный числом из экспоненциальной кривой, каждый с различным распадом константы, σ . То есть вычислите сигнал: $x(t) e^{-\sigma t}$ для каждого значения σ от отрицательной до положительной бесконечности.



ШАГ 3
Берите комплексное преобразование Фурье каждого по экспоненте взвешенного сигнала домена времени т. е. вычислите:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

для каждого значения σ от отрицательной до положительной бесконечности.

ШАГ 4
Упорядочивайте каждый спектр по вертикальной строке в s-плоскости. Положительные частоты находятся в верхней половине s-плоскости, в то время как отрицательные частоты находятся в более низкой половине.

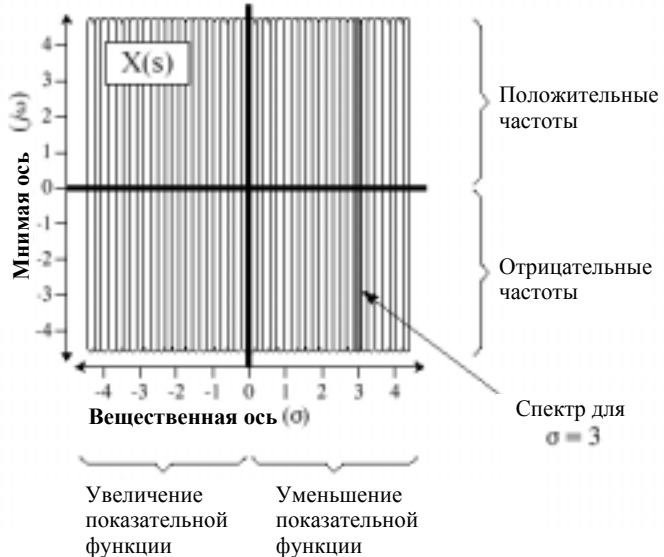


FIGURE 32-1

The Laplace transform. The Laplace transform converts a signal in the *time domain*, $x(t)$, into a signal in the *s-domain*, $X(s)$ or $X(\sigma, \omega)$. The values along each vertical line in the s-domain can be found by multiplying the time domain signal by an exponential curve with a decay constant σ , and taking the complex Fourier transform. When the time domain is entirely real, the upper half of the s-plane is a mirror image of the lower half.

РИСУНОК 32-1

Преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа преобразовывает сигнал в домене времени, $x(t)$, в сигнал в s -домене, $X(s)$ или $X(\sigma, \omega)$. Значения по каждой вертикальной строке в s -домене могут быть найдены, умножая домен времени, экспоненциальной кривой с постоянной времени распада(затухания) σ , и беря комплексное преобразование Фурье. Когда домен времени полностью веществен, верхняя половина s -плоскости - зеркальное изображение нижней половины.

This is the final form of the Laplace transform, one of the most important equations in signal processing and electronics. Pay special attention to the term: e и st , called a *complex exponential*. As shown by the above derivation, complex exponentials are a compact way of representing both sinusoids and exponentials in a single expression.

Это - конечная(заключительная) форма преобразования Лапласа, одно из наиболее важных уравнений в обработке сигналов и электронике. Обратите особое внимание на термин: e и st , называемый *комплексной показательной функцией*. Как показано выше, преобразование(решение?), комплексной показательной функции - компактный путь представления и синусоиды и показательной функции в одиночном выражении.

Although we have explained the Laplace transform as a two stage process (multiplication by an exponential curve followed by the Fourier transform), keep in mind that this is only a teaching aid, a way of breaking Eq. 32-1 into simpler components. The Laplace transform is a single equation relating $x(t)$ and $X(s)$, not a step-by-step procedure. Equation 32-1 describes how to calculate each *point* in the s -plane (identified by its values for σ and ω) based on the values of σ , ω and the time domain signal, $x(t)$. Using the Fourier transform to *simultaneously* calculate all the points along a vertical line is merely a convenience, not a requirement. However, it is very important to remember that the values in the s -plane along the y -axis are *exactly* ($\sigma = 0$) equal to the Fourier transform. As explained later in this chapter, this is a key part of why the Laplace transform is useful.

Хотя мы объяснили преобразование Лапласа как процесс из двух стадий (умножение экспонентой, сопровождаемой преобразованием Фурье), имеем в виду, что это - только преподавательская помощь, пути разложения уравнения 32-1 на более простые компоненты. Преобразование Лапласа - отдельное уравнение, связывающее $x(t)$ и $X(s)$, не постепенная процедура. Уравнение 32-1 описывает, как вычислить каждую *точку* в s -плоскости (идентифицируя ее значения σ и ω) основано на значениях σ , ω и сигнала домена времени, $x(t)$. Использование преобразования Фурье, чтобы *одновременно* вычислить все точки по вертикальной строке - просто удобство, не требование. Однако, очень важно помнить, что значения в s -плоскости по оси y - *точно* ($\sigma = 0$) равняются преобразованию Фурье. Как объяснено позже в этой главе, это - ключевая часть того, почему Лапласова трансформанта является полезной.

To explore the nature of Eq. 32-1 further, let's look at several individual points in the s -domain and examine how the values at these locations are related to the time domain signal. To start, recall how individual points in the *frequency domain* are related to the time domain signal. Each point in the frequency domain, identified by a specific value of ω , corresponds to two sinusoids, $\cos(\omega t)$ and $\sin(\omega t)$. The real part is found by multiplying the time domain signal by the cosine wave, and then integrating from $-\infty$ to ∞ . The imaginary part is found in the same way, except the sine wave is used. If we are dealing with the *complex* Fourier transform, the values at the corresponding negative frequency, $-\omega$, will be the complex conjugate (same real part, negative imaginary part) of the values at ω . The Laplace transform is just an extension of these same concepts.

Чтобы исследовать характер уравнения 32-1 далее, давайте смотреть на несколько индивидуальных точек в s -домене и исследовать, как значения в этих расположениях связаны с (с) АВТЭКС, Санкт-Петербург, <http://www.autex.spb.ru>, e-mail: info@autex.spb.ru

сигналом домена времени. Запускать, повторно вызывать, как индивидуальные точки в частотном домене связаны с сигналом домена времени. Каждая точка в частотном домене, идентифицированном специфической величиной ω , соответствует двум синусоидам, $\cos(\omega t)$ и $\sin(\omega t)$. Вещественная часть найдена, умножая сигнал домена времени волной косинуса, и затем интегрируя от $-\infty$ к ∞ . Мнимая часть найдена таким же образом, кроме того что используется волна синуса. Если мы имеем дело с комплексным преобразованием Фурье, значения в соответствующей отрицательной частоте, $-\omega$, будет ли комплексно-сопряженным (та же самая вещественная часть, отрицательная мнимая часть) значений в ω . Преобразование Лапласа - только расширение(продление) их те же самые концепции.

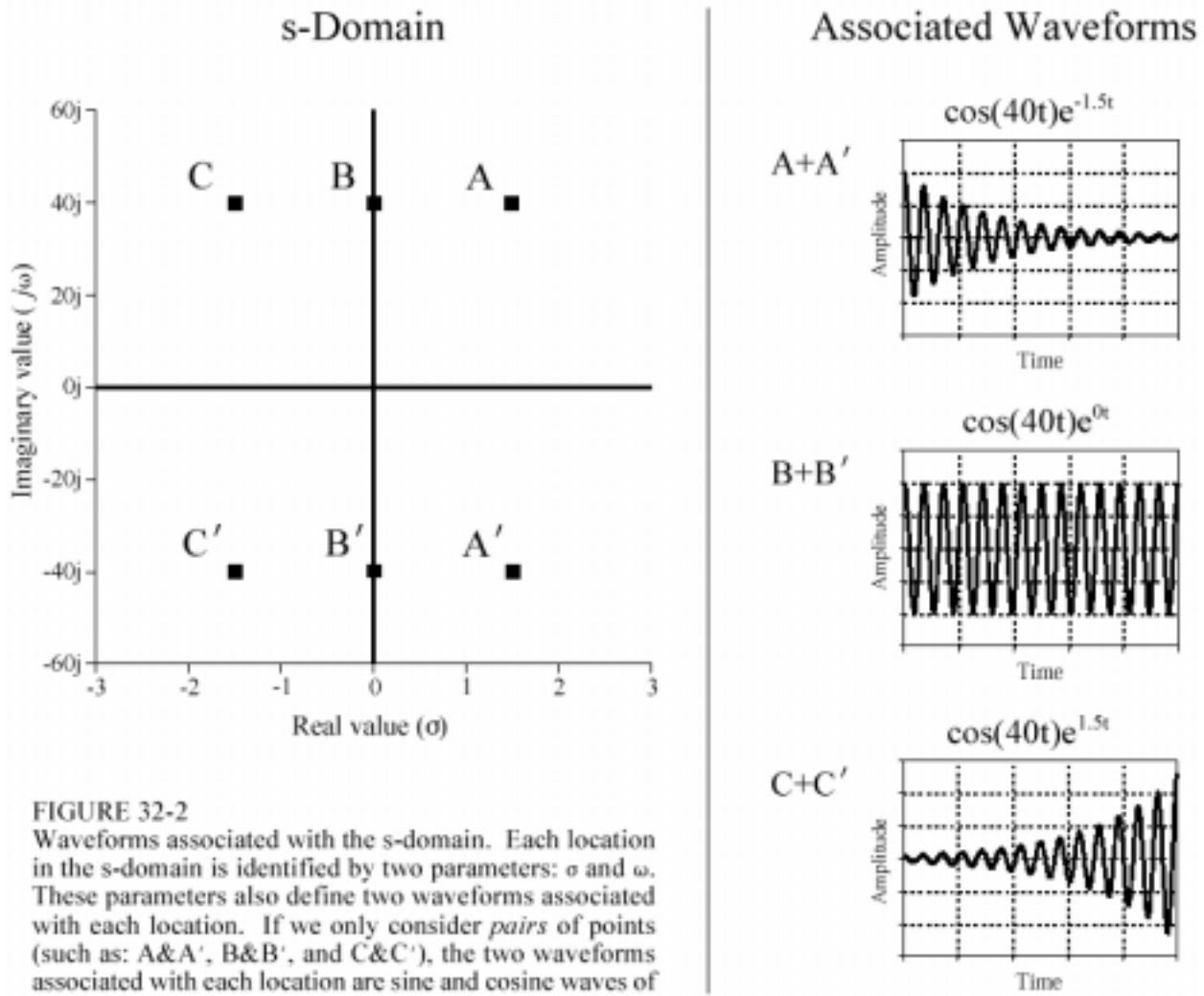


FIGURE 32-2
Waveforms associated with the s-domain. Each location in the s-domain is identified by two parameters: σ and ω . These parameters also define two waveforms associated with each location. If we only consider *pairs* of points (such as: A&A', B&B', and C&C'), the two waveforms associated with each location are sine and cosine waves of frequency ω , with an exponentially changing amplitude controlled by σ .

FIGURE 32-2
Waveforms associated with the s-domain. Each location in the s-domain is identified by two parameters: σ and ω . These parameters also define two waveforms associated with each location. If we only consider *pairs* of points (such as: A&A', B&B', and C&C'), the two waveforms associated with each location are sine and cosine waves of frequency ω , with an exponentially changing amplitude controlled by σ .

РИСУНОК 32-2
Формы волны, связанные с s-доменом. Каждое расположение в s-домене идентифицировано двумя параметрами: σ и ω . Эти параметры также определяют две формы волны, связанные с каждым расположением. Если мы рассматриваем только пары точек (типа: A и A', B и B', и C и C'), две формы волны, связанные с каждым расположением – волна синуса и волна косинуса частоты ω , с по экспоненте изменяющейся амплитуды, управляемой σ .

Figure 32-2 shows three *pairs* of points in the s-plane: A&A', B&B', and C&C'. Just as in the complex frequency spectrum, the points at A, B, & C (the positive frequencies) are the complex conjugates of the points at A', B', & C' (the negative frequencies). The top half of the s-plane is a mirror image of the lower half, and both halves are needed to correspond with a real time domain signal. In other words, treating these points in pairs bypasses the complex math, allowing us to operate in the time domain with only real numbers.

Рисунок 32-2 показывает три пары точек в s-плоскости: А и А', В и В', и С. Также, как в комплексном спектре частот, точки в А, В, и С (положительные частоты) - комплекс сопряженных точек в А', В', и С' (отрицательные частоты). Высшая половина s-плоскости - зеркальное изображение нижней половины, и обе половины необходимы, чтобы соответствовать с сигналом домена реального(вещественного) времени. Другими словами, обрабатывая эти точки в парах обходит комплексную математику, позволяя нам работать в домене времени только с вещественными числами.

Since each of these pairs has specific values for σ and $\pm \omega$, there are two waveforms associated with each pair: $\cos(\omega t) e^{-\sigma t}$ and $\sin(\omega t) e^{-\sigma t}$. For instance, points A&A' are at a location of $\sigma = 1.5$ and $\omega = \pm 40$ and, therefore correspond to the waveforms: $\cos(40t) e^{-1.5t}$ and $\sin(40t) e^{-1.5t}$. As shown in Fig. 32-2, these are sinusoids that exponentially *decreases* in amplitude as time progresses. In this same way, the sine and cosine waves associated with B&B' have a *constant* amplitude, resulting from the value of σ being zero. Likewise, the sine and cosine waves that are associated with locations C&C' exponentially *increases* in amplitude, since σ is negative.

Так как каждая из этих пар имеет удельные величины для σ и $\pm\omega$, имеются две формы волны, связанные с каждой парой: $\cos(\omega t) e^{-\sigma t}$ и $\sin(\omega t) e^{-\sigma t}$. Для образца, точки А и А' являются ли в расположении к формам волны: $\cos(40t) e^{-1.5t}$ и $\sin(40t) e^{-1.5t}$. Как показано в рис. 32-2, они - синусоиды, который по экспоненте уменьшается в амплитуде, поскольку время прогрессирует. В этом тот же самый путь, волны синуса и косинуса, связаны с В и В постоянную амплитуду следующую из значения σ будучи нулем. Аналогично, волны синуса и косинуса, которые связаны с рас положениями С и С' по экспоненте, увеличиваются в амплитуде, с тех пор как σ является отрицательной.

The value at each location in the s-plane consists of a *real part* and an *imaginary part*. The real part is found by multiplying the time domain signal by the exponentially weighted cosine wave and then integrated from $-\infty$ to ∞ . The imaginary part is found in the same way, except the exponentially weighted sine wave is used instead. It looks like this in equation form, using the real part of A&A' as an example:

Значение в каждом расположении в s-плоскости состоит из *вещественной части* и *мнимой части*. Вещественная часть найдена, умножая сигнал домена времени по экспоненте взвешенной волной косинуса и затем интегрирована $-\infty$ к ∞ . Мнимая часть найдена таким же образом, кроме того, что вместо этого используется по экспоненте взвешенной волны синуса. Это напоминает это в форме уравнения, используя вещественную часть А и А' как пример:

$$Re X(\sigma=1.5, \omega=\pm 40) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(40t) e^{-1.5t} dt$$

Figure 32-3 shows an example of a time domain waveform, its frequency spectrum, and its s-domain representation. The example time domain signal is a rectangular pulse of width *two* and height *one*. As shown, the complex Fourier transform of this signal is a sinc function in the real part, and an entirely zero signal in the imaginary part. The s-domain is an undulating two-dimensional signal, displayed here as topographical surfaces of the real and imaginary parts. The mathematics works like this:

Рисунок 32-3 показывает пример формы волны домена времени, ее спектр частот, и ее представление s-домена. Пример сигнал домена времени - прямоугольный импульс ширины *два* и *одной* высоты. Как показано, комплексное преобразование Фурье этого сигнала - sinc функция в вещественной части, и полностью нулевым сигналом в мнимой части. S-домен - холмистый двумерный сигнал, отображенный здесь как топографические поверхности вещественных и мнимых частей. Математика работает подобно этому:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-1}^1 1 e^{-st} dt$$

In words, we start with the definition of the Laplace transform (Eq. 32-1), plug in the unity value for $x(t)$, and change the limits to match the length of the nonzero portion of the time domain signal. Evaluating this integral provides the s-domain signal, expressed in terms of the complex location, s , and the complex value, $X(s)$

В словах, мы запускаем с определения преобразования Лапласа (уравнение 32-1), включаем значения единицы для $x(t)$, и изменяем пределы, чтобы соответствовать длине части отличной от нуля сигнала домена времени. Оценка этого интеграла обеспечивает сигнал s-домена, выраженный в терминах комплексного расположения, s , и комплексного значения, $X(s)$

$$X(s) = \frac{e^s - e^{-s}}{s}$$

While this is the most compact form of the answer, the use of complex variables makes it difficult to understand, and impossible to generate a visual display, such as Fig. 32-3. The solution is to replace the complex variable, s , with $\sigma + j\omega$, and then separate the real and imaginary parts:

В то время как это - наиболее компактная форма ответа, использование комплексных переменных делает трудным понимать, и невозможным генерировать визуальный дисплей, типа рис. 32-3. Решение состоит в том, чтобы заменить комплексную переменную, s , с $\sigma + j\omega$, и затем отделяют вещественные и мнимые части:

$$Re X(\sigma, \omega) = \frac{\sigma \cos(\omega) [e^{\sigma} - e^{-\sigma}] + \omega \sin(\omega) [e^{\sigma} + e^{-\sigma}]}{\sigma^2 + \omega^2}$$

$$Im X(\sigma, \omega) = \frac{\sigma \sin(\omega) [e^{\sigma} + e^{-\sigma}] - \omega \cos(\omega) [e^{\sigma} - e^{-\sigma}]}{\sigma^2 + \omega^2}$$

Time Domain

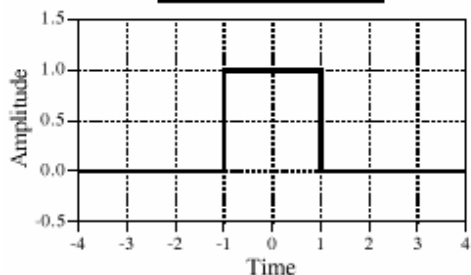


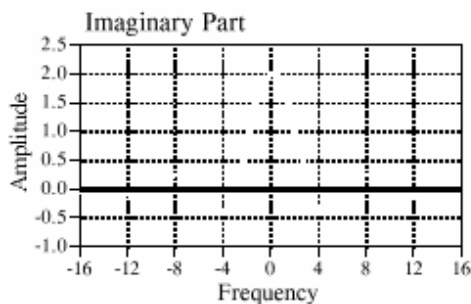
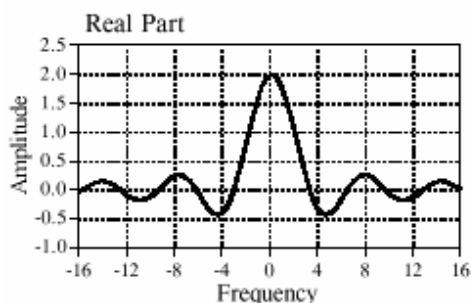
FIGURE 32-3

Time, frequency and s-domains. A time domain signal (the rectangular pulse) is transformed into the frequency domain using the Fourier transform, and into the s-domain using the Laplace transform.

Fourier Transform

Laplace Transform

Frequency Domain



s-Domain

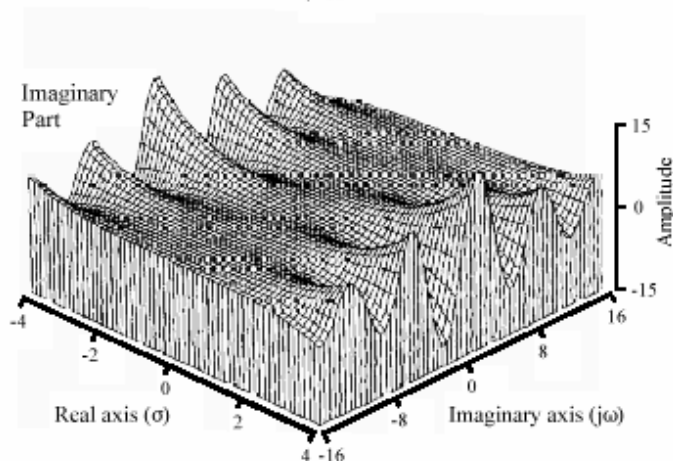
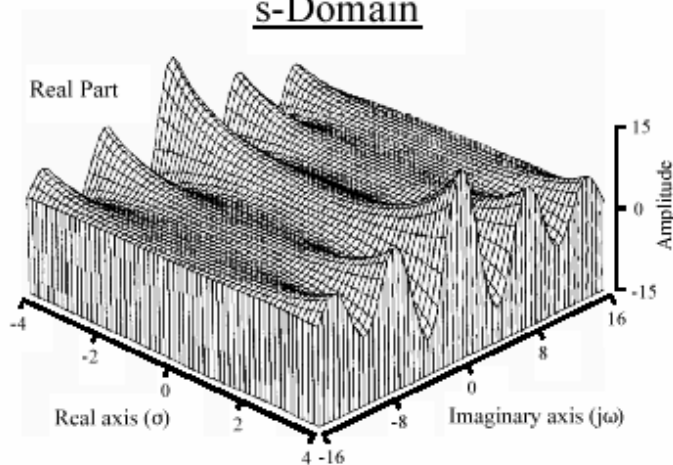


FIGURE 32-3

Time, frequency and s-domains. A time domain signal (the rectangular pulse) is transformed into the frequency domain using the Fourier transform, and into the s-domain using the Laplace transform.

РИСУНОК 32-3

Время, частота и s-домены. Сигнал домена времени (прямоугольный импульс) преобразован в частотный домен, используя преобразование Фурье, и в s-домен, используя преобразование Лапласа.

The topographical surfaces in Fig. 32-3 are graphs of these equations. These equations are quite long and the mathematics to derive them is very tedious. This brings up a practical issue: with algebra of this complexity, how do we know that we haven't made an error in the calculations? One check is to verify that these equations reduce to the *Fourier transform* along the y-axis. This is done by setting σ to zero in the equations, and simplifying:

Топографические поверхности в рис. 32-3 - диаграммы(графики) этих уравнений. Эти уравнения - весьма долго и математика, чтобы получить их, очень утомительна. Это поднимает практическую проблему: с алгеброй этой сложности, как мы знаем что мы не сделали ошибка в вычислениях? Одна проверка должна проверить, что эти уравнения приводят к преобразованию Фурье по оси Y. Это сделано, устанавливая σ , к нулю в уравнениях, и упрощая:

$$\left. \operatorname{Re} X(\sigma, \omega) \right|_{\sigma=0} = \frac{2 \sin(\omega)}{\omega} \quad \left. \operatorname{Im} X(\sigma, \omega) \right|_{\sigma=0} = 0$$

As illustrated in Fig. 32-3, these are the correct frequency domain signals, the same as found by directly taking the Fourier transform of the time domain waveform.

Как иллюстрировано в рис. 32-3, они - правильные частотные сигналы домена, тот же самый как найдено, непосредственно беря преобразование Фурье формы волны домена времени.

Strategy of the Laplace Transform

Стратегия Преобразования Лапласа

An analogy will help in explaining how the Laplace transform is used in signal processing. Imagine you are traveling by train at night between two cities. Your map indicates that the path is very straight, but the night is so dark you cannot see any of the surrounding countryside. With nothing better to do, you notice an altimeter on the wall of the passenger car and decide to keep track of the elevation changes along the route.

Аналогия поможет в объяснении, как преобразование Лапласа используется в обработке сигналов. Вообразите, что Вы перемещаетесь поездом ночью между двумя городами. Ваша карта указывает, что путь очень прямой, но ночь настолько темна, Вы не можете видеть любую из окружающей сельской местности. С ничем лучше, чтобы делать, Вы не обращаете внимание на высотомер на стенке пассажирского вагона и решаете следить за изменениями повышения по маршруту.

Being bored after a few hours, you strike up a conversation with the conductor: "Interesting terrain," you say. "It seems we are generally increasing in elevation, but there are a few interesting irregularities that I have observed." Ignoring the conductor's obvious disinterest, you continue: "Near the start of our journey, we passed through some sort of abrupt rise, followed by an equally abrupt descent. Later we encountered a shallow depression." Thinking you might be dangerous or demented, the conductor decides to respond: "Yes, I guess that is true. Our destination is located at the base of a large mountain range, accounting for the general increase in elevation. However, along the way we pass on the outskirts of a large mountain and through the center of a valley."

Будучи утомленным, после нескольких часов, Вы начинаете разговор с проводником: "Интересный ландшафт," говорите Вы. "Кажется, что мы вообще увеличиваемся в повышении, но имеются несколько интересных неисправностей, которые я наблюдал. " Игнорируя очевидную незаинтересованность проводника, Вы продолжаете: "Около начала нашей поездки, мы прошли через некоторый вид резкого повышения, сопровождаемого одинаково резким спуском. Позже мы столкнулись с поверхностным понижением. "Размышление Вас могло бы быть опасно или сумасшедшее, проводник решает отвечать:" Да, я предполагаю, что истинен. Наш адресат расположен в центре большой горной цепи, составляя(объясняя) общее увеличение в повышении. Однако, по пути мы передаем предметъ большой горы и через центр точки минимума. "

Now, think about how you understand the relationship between elevation and distance along the train route, compared to that of the conductor. Since you have directly measured the elevation along the way, you can rightly claim that you know *everything* about the relationship. In comparison, the conductor knows this same complete information, but in a simpler and more intuitive form: the location of the hills and valleys that *cause* the dips and humps along the path. While your description of the signal might consist of thousands of individual measurements, the conductor's description of the signal will contain only a few parameters.

Теперь, думайте относительно того, как Вы понимаете отношения между повышением и расстоянием по маршруту поезда, сравненному с таковым проводника. Так как Вы непосредственно измерили повышение по пути, Вы можете справедливо требовать, чтобы Вы знали *все* относительно отношений. Для сравнения, проводник знает это та же самая полная информация, но в более простой и более интуитивной форме: расположение холмов и точек минимума, которые *вызывают* спуски и подъемы по пути. В то время как ваше описание сигнала могло бы состоять из тысяч индивидуальных размеров(измерений), описание проводника сигнала будет содержать только несколько параметров.

To show how this is analogous to signal processing, imagine we are trying to understand the characteristics of some electric circuit. To aid in our investigation, we carefully measure the impulse response and/or the frequency response. As discussed in previous chapters, the impulse and frequency responses contain *complete* information about this linear system.

Чтобы показывать, как, это аналогично обработке сигналов, воображает, что мы пробуем понимать характеристики некоторой электрической цепи. Чтобы помогать в нашем исследовании, мы тщательно измеряем импульсную передаточную функцию и-или частотную характеристику. Как обсуждено в предыдущих главах, импульс и частотные характеристики содержат *полную* информацию относительно этой линейной системы.

However, this does not mean that you know the information in the *simplest* way. In particular, you understand the frequency response as a set of values that change with frequency. Just as in

our train analogy, the frequency response can be more easily understood in terms of the terrain *surrounding* the frequency response. That is, by the characteristics of the s-plane.

Однако, это не подразумевает, что Вы знаете информацию самым простым способом. В частности Вы понимаете частотную характеристику как набор значений то изменение(замена) с частотой. Так же, как на нашей аналогии поезда, частотная характеристика может быть более легко понята в терминах ландшафта, окружающего частотную характеристику. То есть в соответствии с характеристиками s-плоскости.

With the train analogy in mind, look back at Fig. 32-3, and ask: how does the shape of this s-domain aid in understanding the frequency response? The answer is, it doesn't! The s-plane in this example makes a nice graph, but it provides no insight into why the frequency domain behaves as it does. This is because the Laplace transform is designed to analyze a specific class of time domain signals: *impulse responses that consist of sinusoids and exponentials*. If the Laplace transform is taken of some other waveform (such as the rectangular pulse in Fig. 32-3), the resulting s-domain is meaningless.

С аналогией поезда в памяти, оглянитесь назад в рис. 32-3, и задайтесь вопросом: как форма этого s-домена помогает в понимании частотной характеристики? Ответ, это не делает! S-плоскость в этом примере делает хорошую диаграмму(график), но не обеспечивает никакого проникновения в то, почему частотный домен ведет себя так, как это делает. Это потому, что преобразование Лапласа предназначено, чтобы анализировать специфический класс сигналов домена времени: *импульсные передаточные функции, которые состоят из синусоид и показательных функций*. Если преобразование Лапласа принято от некоторой другой формы волны (типа прямоугольного импульса в рис. 32-3), заканчивающийся s-домен бессмыслен.

As mentioned in the introduction, systems that belong to this class are extremely common in science and engineering. This is because sinusoids and exponentials are solutions to *differential equations*, the mathematics that controls much of our physical world. For example, all of the following systems are governed by differential equations: electric circuits, wave propagation, linear and rotational motion, electric and magnetic fields, heat flow, etc.

Как упомянуто во введении, системы, которые принадлежат этому классу, чрезвычайно обычны в науке и технике. Это - то, потому что синусоиды и показательные функции - решения *дифференциальных* уравнений, математика, которая управляет многим из нашего физического мира. Например, все следующие систем управляются дифференциальными уравнениями: электрические цепи, волновое распространение, линейное и вращательное движение, электрические и магнитные поля, вызывающие возникновение тока, и т.д.

Imagine we are trying to understand some linear system that is controlled by differential equations, such as an electric circuit. Solving the differential equations provides a mathematical way to find the impulse response. Alternatively, we could measure the impulse response using suitable pulse generators, oscilloscopes, data recorders, etc. Before we inspect the newly found impulse response, we ask ourselves what we *expect* to find. There are several characteristics of the waveform that we know without even looking. First, the impulse response must be *causal*. In other words, the impulse response must have a value of zero until the input becomes nonzero at $t = 0$. This is the cause and effect that our universe is based upon.

Вообразите, что мы пробуем понять некоторую линейную систему, типа электрической цепи, которая управляется дифференциальными уравнениями. Решение дифференциальных уравнений обеспечивает математический способ найти импульсную передаточную

(с) АВТЭКС, Санкт-Петербург, <http://www.autex.spb.ru>, e-mail: info@autex.spb.ru

функцию. Альтернативно, мы могли измерять импульсную передаточную функцию, используя подходящие генераторы импульса, осциллографы, регистраторы данных, и т.д. Прежде, чем осматривать недавно найденную импульсную передаточную функцию, мы спрашиваем себя, что мы *ожидаем* найти. Имеется несколько характеристик формы волны, которую мы знаем без даже просмотра. Во первых, импульсная передаточная функция должна быть причинная. Другими словами, импульсная передаточная функция должна иметь значение нуля, пока ввод не становится отличным от нуля в $t = 0$. Это - причина и эффект, на чем наша область основана.

The second thing we know about the impulse response is that it will be composed of *sinusoids and exponentials*, because these are the solutions to the differential equations that govern the system. Try as we might, we will never find this type of system having an impulse response that is, for example, a square pulse or triangular waveform. Third, the impulse response will be *infinite* in length. That is, it has nonzero values that extend from $t = 0$ to $t = +\infty$. This is because sine and cosine waves have a constant amplitude, and exponentials decay toward zero without ever actually reaching it. If the system we are investigating is **stable**, the amplitude of the impulse response will become smaller as time increases, reaching a value of zero at $t = +\infty$. There is also the possibility that the system is **unstable**, for example, an amplifier that spontaneously oscillates due to an excessive amount of feedback. In this case, the impulse response will *increase* in amplitude as time increases, becoming infinitely large. Even the smallest disturbance to this system will produce an unbounded output.

Вторая вещь, которую мы знаем относительно импульсной передаточной функции, состоит в том, что это будет составлено из *синусоид и показательных функций*, потому что они - решения дифференциальных уравнений, которые управляют системой. Попытка, поскольку мы могли бы, мы никогда не будет находить этот тип системы, имеющей импульсную передаточную функцию, то есть, например, квадратный импульс или треугольную форму волны. Третье, импульсная передаточная функция будет *бесконечна* в длине. То есть это имеет значения отличные от нуля, которые простираются от $t = 0$ к $t = +\infty$. Это - то, потому что синус и волны косинуса имеют постоянную амплитуду, и распад(затухание) экспоненциала к нулю без когда-либо фактически достижение этого. Если система, которую мы исследуем, **устойчива(стабильна)**, амплитуда ответа импульса станет меньше как увеличения времени, достигая значения нуля в $t = +\infty$. Имеется также возможность, что система **неустойчива(нестабильна)**, например, усилитель, который спонтанно колеблется из-за чрезмерной глубины обратной связи. В этом случае, импульсная передаточная функция *увеличится* в амплитуде как увеличения времени, становясь бесконечно большой. Даже самое маленькое возмущение к этой системе произведет неограниченный выход.

The general mathematics of the Laplace transform is very similar to that of the Fourier transform. In both cases, predetermined waveforms are multiplied by the time domain signal, and the result integrated. At first glance, it would appear that the strategy of the Laplace transform is the same as the Fourier transform: correlate the time domain signal with a set of basis functions to decompose the waveform. Not true! Even though the mathematics is much the same, the rationale behind the two techniques is very different. The Laplace transform *probes* the time domain waveform to identify its key features: the *frequencies* of the sinusoids, and the *decay constants* of the exponentials. An example will show how this works.

Общая математика преобразования Лапласа очень похожа к таковому трансформанты Фурье. В обоих случаях, predetermined формы волны умножены на сигнал домена времени, и интегрированный результат. На первый взгляд, казалось бы, что стратегия преобразования Лапласа - та же самая как преобразование Фурье: коррелируйте сигнал домена (с) АВТЭКС, Санкт-Петербург, <http://www.autex.spb.ru>, e-mail: info@autex.spb.ru

времени с набором базисных функций, чтобы анализировать(расчленив) форму волны. Не истина! Даже притом, что математика аналогична, объяснение позади двух методов очень различно. Преобразование Лапласа *зондирует* форму волны домена времени, чтобы идентифицировать ее главные особенности: *частоты* синусоид, и *постоянных времени распада* показательных функций. Пример покажет, как это работает.

The center column in Fig. 32-5 shows the impulse response of the *RLC* notch filter discussed in Chapter 30. It contains an impulse at $t = 0$, followed by an exponentially decaying sinusoid. As illustrated in (a) through (e), we will *probe* this impulse response with various exponentially decaying sinusoids. Each of these probing waveforms is characterized by two parameters: ω , that determines the sinusoidal frequency, and σ , that determines the decay rate. In other words, each probing waveform corresponds to a different location in the *s*-plane, as shown by the *s*-plane diagram in Fig. 32-4. The impulse response is probed by *multiplying* it with these waveforms, and then integrating the result from $t = -\infty$ to $+\infty$. This action is shown in the right column. Our goal is to find combinations of σ and ω that exactly *cancel* the impulse response being investigated. This cancellation can occur in two forms: the area under the curve can be either *zero*, or just *barely infinite*. All other results are uninteresting and can be ignored. Locations in the *s*-plane that produce a zero cancellation are called **zeros** of the system. Likewise, locations that produce the "just barely infinite" type of cancellation are called **poles**. Poles and zeros are analogous to the mountains and valleys in our train story, representing the terrain "around" the frequency response.

Средний столбец в рис. 32-5 показывает импульсную передаточную функцию *RLC* фильтра-пробки, обсужденной в главе 30. Это содержит импульс в $t = 0$, сопровождаемый по экспоненте распадающейся синусоидой. Как иллюстрировано от (a) до (e), мы будем *зондировать* эту импульсную передаточную функцию с различными по экспоненте распадающимися синусоидами. Каждая из этих форм волны зондирования характеризуется двумя параметрами: ω , который определяет синусоидальную частоту, и σ , который определяет скорость(частоту) распада. Другими словами, каждая форма волны зондирования соответствует различному расположению в *s*-плоскости, как показано в соответствии с диаграммой *s*-плоскости в рис. 32-4. Импульсная передаточная функция исследована, *умножая* это с этими формами волны, и затем интегрируя следствие $t = -\infty$ to $+\infty$. Это действие показывается в правом столбце. Наша цель состоит в том, чтобы найти комбинации σ и ω это точно отменяет исследуемую импульсную передаточную функцию. Эта отмена может происходить в двух формах: Область под кривой может быть или *нуль*, или только *только бесконечная*. Все другие результаты неинтересны и могут игнорироваться. Расположения в *s*-плоскости, которые производят нулевую отмену, называемую **нулями** системы. Аналогично, расположения, которые производят "только бесконечный" тип отмены, называются **полюсами**. Полюса и нули аналогичны горам и точкам минимума в нашей истории поезда, представляя ландшафт "вокруг" частотной характеристики.

To start, consider what happens when the probing waveform decreases in amplitude as time advances, as shown in (a). This will occur whenever (the right half of the *s*-plane). Since both the impulse response and the probe becomes smaller with increasing time, the product of the two will also have this same characteristic. When the product of the two waveforms is integrated from negative to positive infinity, the result will be some number that is not especially interesting. In particular, a decreasing probe *cannot* cancel a decreasing impulse response. This means that a stable system will not have any poles with $\omega > 0$. In other words, all of the poles in a stable system are confined to the left half of the *s*-plane. In fact, poles in the right half of the *s*-plane show that the system is unstable (i.e., an impulse response that *increases* with time).

Запускать, рассматривать, что случается, когда зондирование форма волны уменьшается в амплитуде как усовершенствования времени, как показано в (а). Это произойдет всякий раз, когда $\sigma > 0$ (правая половина s-плоскости). С тех пор и импульсная передаточная функция и зонд становится меньшим с увеличивающимся временем, продукт этих двух будет также иметь это той же самой характеристикой. Когда продукт из этих двух форм волны интегрировано от отрицательной до положительной бесконечности, результат будет некоторый число, которое не особенно интересно. В частности уменьшающийся зонд *не может* отменять уменьшающуюся импульсную передаточную функцию. Это означает, что устойчивая система не будет иметь любые полюса с $\omega > 0$. Другими словами, все полюса в устойчивой системе ограничены до левой половины s-плоскости. Фактически, полюса в правой половине s-плоскости показывают, что система непостоянна (то есть, импульсная передаточная функция, которая *увеличивается* со временем).

FIGURE 32-4

Pole-zero example. The notch filter has two poles (represented by Ч) and two zeros (represented by Ц). This s-plane diagram shows the five locations we will "probe" in this example to analyze this system. (Figure 30-5 is a continuation of this example).

s-plane diagram

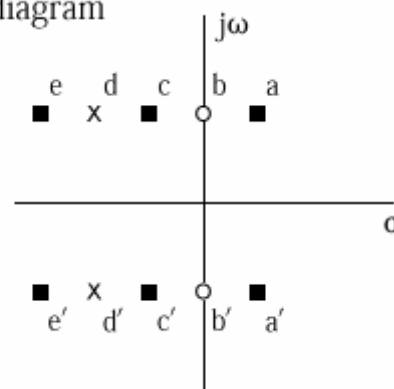


РИСУНОК 32-4

Пример нулей и полюсов. Фильтр-пробка имеет два полюса (представленный x) и двумя нулями (представленный o). Эта диаграмма s-плоскости показывает эти пять расположений, которые мы будем "зондировать" в этом примере, чтобы анализировать эту систему. (Рисунок 30-5 - продолжение этого примера).

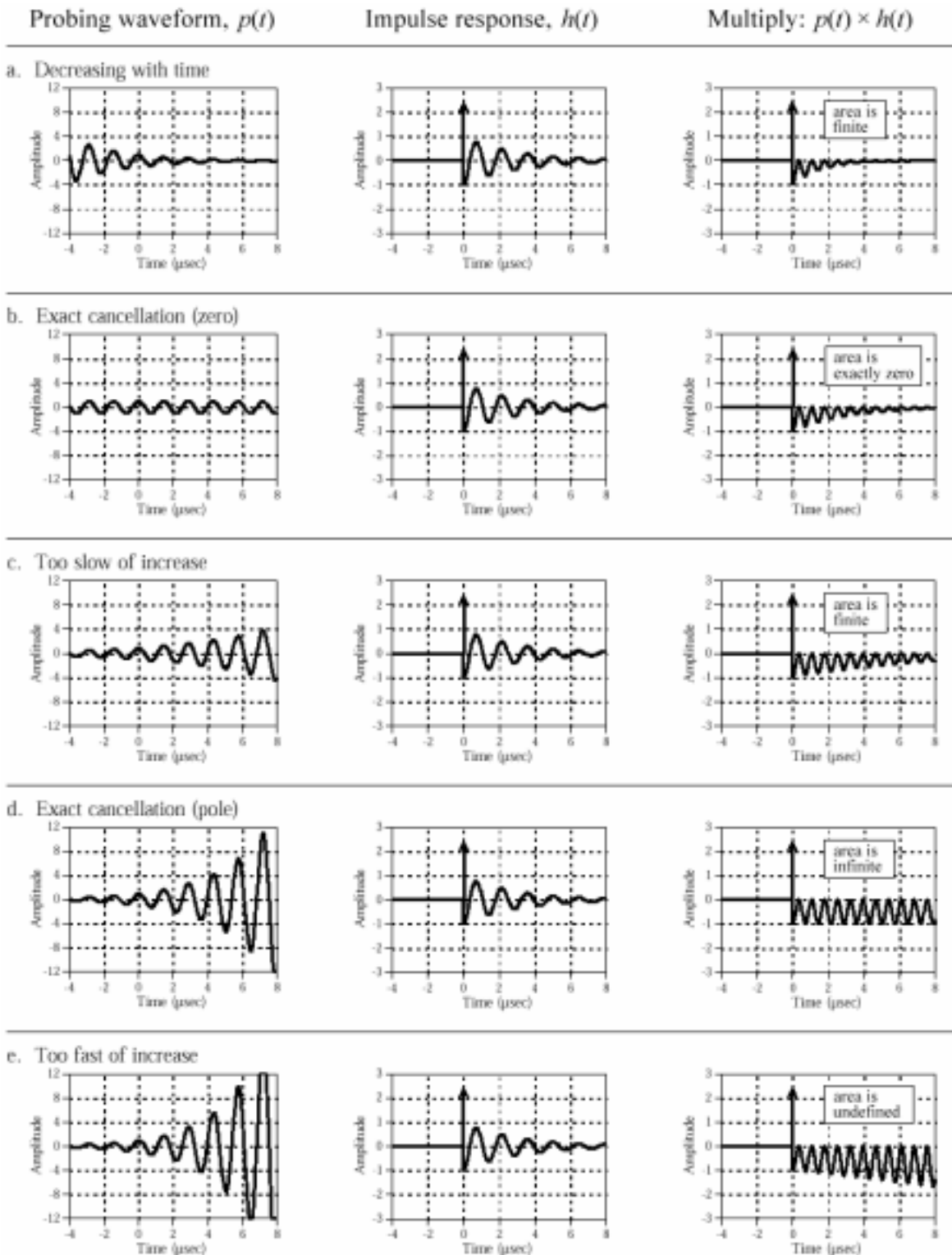


FIGURE 32-5

Probing the impulse response. The Laplace transform can be viewed as probing the system's impulse response with various exponentially decaying sinusoids. Probing waveforms that produce a cancellation are called *poles* and *zeros*. This illustration shows five probing waveforms (left column) being applied to the impulse response of a notch filter (center column). The locations in the s-plane that correspond to these five waveforms are shown in Fig. 32-4.

РИСУНОК 32-5. Зондирование импульсной передаточной функции.

Преобразование Лапласа может быть просмотрено как зондирование импульсной передаточной функции системы с различным по экспоненте распадающиеся синусоиды. Зондирование форм волны, которые произ- (с) АВТЭКС, Санкт-Петербург, <http://www.autex.spb.ru>, e-mail: info@autex.spb.ru

водят отмену, называется *полюсами* и *нулями*. Эта иллюстрация показывает пять форм волны зондирования (левый столбец) применяемые к импульсной передаточной функции фильтра-пробки (средний столбец). Расположения в s -плоскости, которые соответствуют этим пяти формам волны, показываются в рис. 32-4.

Figure (b) shows one of the special cases we have been looking for. When this waveform is multiplied by the impulse response, the resulting integral has a value of zero. This occurs because the area above the x -axis (from the delta function) is exactly equal to the area below (from the rectified sinusoid). The values for σ and ω that produce this type of cancellation are called a *zero* of the system. As shown in the s -plane diagram of Fig. 32-4, zeros are indicated by small circles (\circ).

Рисунок (b) показывает один из частных случаев, которые мы искали. Когда эта форма волны умножена на импульсную передаточную функцию, заканчивающийся интеграл имеет значение нуля. Это происходит, потому что область выше оси X (от дельта функции) точно равна области ниже (от исправленной синусоиды). Значения для σ и ω это производит этот тип отмены, называемый *нулем* системы. Как показано в диаграмме s -плоскости рис. 32-4, нули обозначены маленькими кругами (\circ).

Figure (c) shows the next probe we can try. Here we are using a sinusoid that exponentially *increases* with time, but at a rate *slower* than the impulse response is *decreasing* with time. This results in the product of the two waveforms also decreasing as time advances. As in (a), this makes the integral of the product some uninteresting real number. The important point being that no type of exact cancellation occurs.

Рисунок (c) показывает следующий зонд, который мы можем пробовать. Здесь мы используем синусоиду, которая по экспоненте увеличивает со временем, но в скорости(частоте) *медленнее* чем импульсная передаточная функция уменьшается со временем. Это приводит к продукту из этих двух форм волны, также *уменьшающихся* как усовершенствования время. Как в (a), это делает интеграл из продукта некоторым неинтересным вещественным числом. Важный пункт, являющийся, что никакой тип точной отмены не происходит.

Jumping out of order, look at (e), a probing waveform that increases at a *faster* rate than the impulse response decays. When multiplied, the resulting signal increases in amplitude as time advances. This means that the area under the curve becomes larger with increasing time, and the total area from $t = -\infty$ to $+\infty$ is not defined. In mathematical jargon, the *integral does not converge*. In other words, not all areas of the s -plane have a defined value. The portion of the s -plane where the integral is defined is called the **region-of-convergence**. In some mathematical techniques it is important to know what portions of the s -plane are within the region-of-convergence. However, this information is not needed for the applications in this book. Only the exact cancellations are of interest for this discussion.

Скачущий не в порядке, смотрите на (e), форма волны зондирования, которая увеличивается в более быстром скорости(частоте) чем распады импульсной передаточной функции. Когда умножено, заканчивающийся сигнал увеличивается в амплитуде как усовершенствования время. Это означает, что область под кривой становится большей с увеличивающимся временем, и полная область от $t = -\infty$ to $+\infty$ не определена. В математическом жаргоне, интеграл не сходится. Другими словами, не все области s -плоскости имеют определенное значение. Часть s -плоскости, где интеграл определен, называется "**область сходимости**". В некоторых математических методах важно знать то, каким части s -плоскости являются в пределах "области сходимости". Однако, эта информация не необходима для приложений в этой книге. Только точные отмены представляют интерес для этого обсуждения.

In (d), the probing waveform increases at exactly the same rate that the impulse response decreases. This makes the product of the two waveforms have a constant amplitude. In other words, this is the dividing line between (c) and (e), resulting in a total area that is just *barely undefined* (if the mathematicians will forgive this loose description). In more exact terms, this point is on the borderline of the region of convergence. As mentioned, values for σ and ω that produce this type of exact cancellation are called *poles* of the system. Poles are indicated in the s-plane by crosses (x).

В (d), форма волны зондирования увеличивает в точно тот же самый скорость(частоту) что уменьшения импульсной передаточной функции. Это делает продукт из этих двух форм волны, имеют постоянную амплитуду. Другими словами, это - разделительная линия между (с) и (е), приводя к полной области, которая является только *только неопределенной* (если математики простят это свободное описание). В более точных терминах, эта точка находится на границе области сходимости. Как упомянуто, оценивает для σ и ω , которые производят этот тип точной отмены, называются *полюсами* системы. Полюса обозначены в s-плоскости пересечениями (x).

Analysis of Electric Circuits

Анализ Электрических цепей

We have introduced the Laplace transform in graphical terms, describing what the waveforms look like and how they are manipulated. This is the most intuitive way of understanding the approach, but is very different from how it is actually used. The Laplace transform is inherently a mathematical technique; it is used by writing and manipulating *equations*. The problem is, it is easy to become lost in the abstract nature of the complex algebra and lose all connection to the real world. Your task is to merge the two views together. The Laplace transform is the primary method for analyzing electric circuits. Keep in mind that *any* system governed by differential equations can be handled the same way; electric circuits are just an example we are using.

Мы представили преобразование Лапласа в графических терминах, описывая, что формы волны напоминают и как они управляются. Это - наиболее интуитивный путь понимания подхода, но очень отличается, как это фактически используется. Преобразование Лапласа - неотъемлемо математическая методика; это используется, записывая и управляя уравнениями. Проблема, просто стать потеряно в абстрактном характере(природе) комплексной алгебры и свободно все подключение(связь) с реальным(вещественным) миром. Ваша задача состоит в том, чтобы объединить два представления(вида) вместе. Преобразование Лапласа - первичный метод для анализа электрических цепей. Имейте в виду, что любая система, управляемая дифференциальными уравнениями может быть обработана тот же самый путь; электрические цепи - только пример, который мы используем.

The brute force approach is to solve the differential equations controlling the system, providing the system's impulse response. The impulse response can then be converted into the s-domain via Eq. 32-1. Fortunately, there is a better way: transform each of the individual components into the s-domain, and *then* account for how they interact. This is very similar to the *phasor transform* presented in Chapter 30, where resistors, inductors and capacitors are represented by R , $j\omega L$, and $1/j\omega C$, respectively. In the Laplace transform, resistors, inductors and capacitors become the complex variables: R , sL , and $1/sC$. Notice that the phasor transform is a *subset* of the Laplace

transform. That is, when σ is set to zero in $s = \sigma + j\omega$, R becomes R , sL becomes $j\omega L$, and $1/sC$ becomes $1/j\omega C$.

Подход решения "в лоб" состоит в том, чтобы решить дифференциальные уравнения управляющие системой, обеспечивая импульсную передаточную функцию системы. Импульсная передаточная функция может тогда быть преобразована в s -домен через уравнение 32-1. К счастью, имеется лучший путь: преобразуйте каждый из индивидуальных компонентов в s -домен, и *затем* объясните, как они взаимодействуют. Это очень похоже к *phasor transform*, представленной в главе 30, где резисторы, катушки индуктивности и конденсаторы представлены R , $j\omega L$, и $1/j\omega C$, соответственно. В преобразовании Лапласа, резисторы, катушки индуктивности и конденсаторы станут комплексными переменными: R , sL , и $1/sC$. Обратите внимание, что *phasor transform* - *подмножество* преобразования Лапласа. То есть когда σ установите на нуль в $s = \sigma + j\omega$, R становится R , sL становится $j\omega L$, и $1/sC$ становится $1/j\omega C$.

Just as in Chapter 30, we will treat each of the three components as an individual system, with the current waveform being the input signal, and the voltage waveform being the output signal. When we say that resistors, inductors and capacitors become R , sL , and $1/sC$ in the s -domain, this refers to the output divided by the input. In other words, the Laplace transform of the *voltage waveform* divided by the Laplace transform of the *current waveform* is equal to these expressions.

Также, как в главе 30, мы обработаем каждый из этих трех компонентов как индивидуальную систему, с текущей формой волны, являющейся входным сигналом, и формой волны напряжения, являющейся сигналом выхода. Когда мы говорим, что резисторы, катушки индуктивности и конденсаторы станут R , sL , и $1/sC$ в s -домене, это относится к выходу, разделенной вводом. Другими словами, преобразование Лапласа формы волны напряжения, разделенной преобразованием Лапласа текущей формы волны равно этим выражениям.

As an example of this, imagine we force the current through an inductor to be a unity amplitude cosine wave with a frequency given by ω_0 . The resulting *voltage* waveform across the inductor can be found by solving the differential equation that governs its operation:

Как пример этого, вообразите, что мы вынуждаем ток через катушку индуктивности быть волной косинуса амплитуды единицы с частотой, данной ω_0 . Заканчивающаяся форма волны *напряжения* на катушке индуктивности может быть найдена, решая дифференциальное уравнение, которое управляет его операцией:

$$v(t) = L \frac{d}{dt} i(t) = L \frac{d}{dt} \cos(\omega_0 t) = -\omega_0 L \sin(\omega_0 t)$$

If we start the current waveform at $t = 0$ the voltage waveform will also start, at this same time (i.e., $i(t) = 0$ and $v(t) = 0$ for $t < 0$). These voltage and current waveforms are converted into the s -domain by Eq. 32-1:

Если мы запускаем текущую форму волны в $t = 0$, форма волны напряжения также запустит, в этом то же самое время (то есть, $i(t) = 0$ и $v(t) = 0$ для $t < 0$). Это напряжение и текущие формы волны преобразованы в s -домен уравнением 32-1:

$$I(s) = \int_0^{\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-st} dt = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + s^2}$$

(с) АВТЭКС, Санкт-

Петербург

$$V(s) = \int_0^{\infty} -\omega_0 L \sin(\omega_0 t) e^{-st} dt = \frac{\omega_0 L s}{\omega_0^2 + s^2}$$

To complete this example, we will divide the s-domain voltage by the s-domain current, just as if we were using Ohm's law ($R = V/I$):

Чтобы закончить этот пример, мы делили бы напряжение s-домена током s-домена, так же, как если мы использовали Закон Ома ($R = V/I$):

$$\frac{V(s)}{I(s)} = \frac{\frac{\omega_0 L s}{\omega_0^2 + s^2}}{\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + s^2}} = sL$$

We find that the s-domain representation of the voltage across the inductor, divided by the s-domain representation of the current through the inductor, is equal to sL . This is *always* the case, regardless of the current waveform we start with. In a similar way, the ratio of s-domain voltage to s-domain current is always equal to R for resistors, and $1/sC$ for capacitors.

Мы находим, что представление s-домена напряжения поперек катушки индуктивности, разделенной представлением s-домена тока через катушку индуктивности, является равным sL . Это всегда имеет место, независимо от текущей формы волны, с которой мы запускаем. Подобным способом, отношение(коэффициент) напряжения s-домена к току s-домена всегда равно R для резисторов, и $1/sC$ для конденсаторов.

Figure 32-6 shows an example circuit we will analyze with the Laplace transform, the RLC notch filter discussed in Chapter 30. Since this analysis is the same for all electric circuits, we will outline it in steps.

Рисунок 32-6 показывает пример схемы, которую мы анализируем с преобразованием Лапласа, RLC фильтр-пробка, обсужденная в главе 30. Так как этот анализ - тот же самый для всех электрических цепей, мы выделим это в шагах.

Step 1. Transform each of the components into the s-domain. In other words, replace the value of each resistor with R , each inductor with sL , and each capacitor with $1/sC$. This is shown in Fig. 32-6.

Шаг 1. Преобразуйте каждый из компонентов в s-домен. Другими словами, замените значение каждого резистора с R , каждая катушка индуктивности с sL , и каждым конденсатором with $1/sC$. Этому показывают в рис. 32-6.

Step 2: Find $H(s)$, the output divided by the input. As described in Chapter 30, this is done by treating each of the components as if they obey Ohm's law, with the "resistances" given by: R , sL , and $1/sC$. This allows us to use the standard equations for resistors in series, resistors in par-

allel, voltage dividers, etc. Treating the RLC circuit in this example as a voltage divider (just as in Chapter 30), is found: $H(s)$

Шаг 2: Найдите $H(s)$, выход, разделенный вводом. Как описано в главе 30, это сделано, обрабатывая каждый из компонентов, как будто они удовлетворяют условиям Закона Ома, с "сопротивлениями", данными: R , sL , и $1/sC$. Это позволяет нам использовать нормальные уравнения для резисторов последовательно, резисторы в параллельном, делители напряжения, и т.д. При обработке RLC схемы в этом примере, поскольку делитель напряжения (так же, как в главе 30), $H(s)$ найден:

$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{sL + 1/sC}{R + sL + 1/sC} = \frac{sL + 1/sC}{R + sL + 1/sC} \left[\frac{s}{s} \right] = \frac{Ls^2 + 1/C}{Ls^2 + Rs + 1/C}$$

As you recall from *Fourier* analysis, the frequency spectrum of the output signal divided by the frequency spectrum of the input signal is equal to the system's *frequency response*, given the symbol, $H(\omega)$. The above equation is an extension of this into the s -domain. The signal $H(s)$, is called the system's **transfer function**, and is equal to the s -domain representation of the output signal divided by the s -domain representation of the input signal. Further, $H(s)$ is equal to the *Laplace transform* of the impulse response, just the same as $H(\omega)$ is equal to the *Fourier transform* of the impulse response.

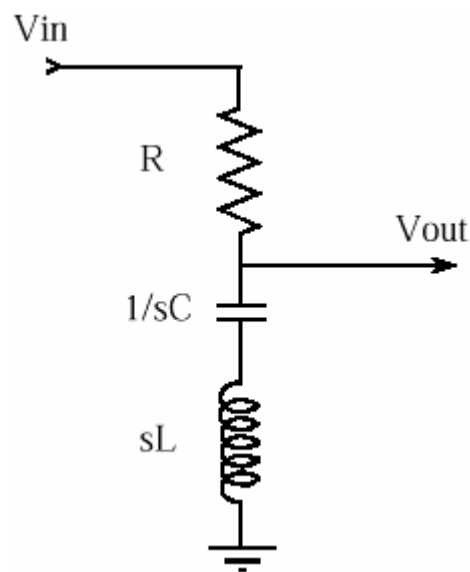
Как Вы помните из анализа *Фурье*, спектр частот сигнала выхода, разделенного спектром частот входного сигнала равен частотной характеристике системы, учитывая символ, $H(\omega)$. Вышеупомянутое уравнение - расширение(продление) этого в s -домен. Сигнал $H(s)$, называется функцией преобразования типа системы, и равен представлению s -домена сигнала выхода, разделенного представлением s -домена входного сигнала. Далее, $H(s)$ равен *преобразованию Лапласа* импульсной передаточной функции, все равно как $H(\omega)$ является равным трансформанте *преобразованию Фурье* импульсной передаточной функции.

FIGURE 32-6

Notch filter analysis in the s -domain. The first step in this procedure is to replace the resistor, inductor & capacitor values with their s -domain equivalents.

РИСУНОК 32-6

Анализ Фильтра-пробки в s -домене. Первый шаг в эту процедуру должен заменить резистор, катушку индуктивности и конденсаторные значения с их эквивалентами s -домена.



So far, this is identical to the techniques of the last chapter, except for using s instead of $j\omega$. The difference between the two methods is what happens from this point on. This is as far as we can go with $j\omega$. We might graph the frequency response, or examining it in some other way; however, this is a mathematical dead end. In comparison, the interesting aspects of the Laplace transform have just begun. Finding $H(s)$ is the key to Laplace

analysis; however, it must be expressed in a particular form to be useful. This requires the algebraic manipulation of the next two steps.

Пока, это идентично методам прошлой главы, если бы не использование s вместо $j\omega$. Разность между этими двумя методами - то, что случается от этого пункта(точки) на. Это - то, насколько мы можем идти с $j\omega$. Мы могли бы чертить график частотная характеристика, или исследование этого в другим способом; однако, это - математический тупик. Для сравнения, интересные аспекты Лапласовой трансформанты только что начались. Обнаружение $H(s)$ - ключ к Лапласову анализу; однако, это должно быть выражено в специфической форме, чтобы быть полезным. Это требует алгебраической манипуляции следующих двух шагов.

Step 3: Arrange $H(s)$ to be one polynomial over another. This makes the transfer function written as:

Шаг 3: Упорядочение $H(s)$, чтобы быть один полиномиальный по другому. Это делает функцию преобразования типа, письменную как:

EQUATION 32-2

Transfer function in polynomial form.

УРАВНЕНИЕ 32-2

Функция преобразования в полиномиальную форму.

$$H(s) = \frac{as^2 + bs + c}{as^2 + bs + c}$$

It is always possible to express the transfer function in this form *if* the system is controlled by differential equations. For example, the rectangular pulse shown in Fig. 32-3 is not the solution to a differential equation and its Laplace transform cannot be written in this way. In comparison, any electric circuit composed of resistors, capacitors, and inductors can be written in this form. For the *RLC* notch filter used in this example, the algebra shown in *step 2* has already placed the transfer function in the correct form, that is:

Всегда возможно выразить преобразование функции в этой форме, если система управляется дифференциальными уравнениями. Например, прямоугольный импульс, показанный в рис. 32-3 - не, решение дифференциального уравнения и его преобразование Лапласа не может быть написано таким образом. Для сравнения, любая электрическая цепь, составленная из резисторов, конденсаторов, и катушки индуктивности могут быть написаны в этой форме. Для *RLC* фильтра-пробки, используемой в этом примере, алгебра, показанная в *шаге 2* уже поместила функцию преобразования в правильную форму, которая:

$$H(s) = \frac{as^2 + bs + c}{as^2 + bs + c} = \frac{Ls^2 + 1/C}{Ls^2 + Rs + 1/C}$$

where: $a = L$, $b = 0$, $c = 1/C$; and $a = L$, $b = R$, $c = 1/C$

Step 4: Factor the numerator and denominator polynomials. That is, break the numerator and denominator polynomials into components that each contain a single s . When the components are multiplied together, they must equal the original numerator and denominator. In other words, the equation is placed into the form:

Шаг 4: Разложите на множители многочлены знаменателя и числитель. То есть разбейте числитель и многочлены знаменателя в компоненты, что каждый содержит единствен-

ный(отдельный) s . Когда компоненты переможены, они должны равняться первоначальному числителю и знаменателю. Другими словами, уравнение помещено в форму:

УРАВНЕНИЕ 32-3

Разложенный на множители s -домен. Эта форма позволяет s -домену быть выраженному как полюса и нули.

$$H(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)(s - z_3)\dots}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)\dots}$$

The roots of the numerator, z_1, z_2, z_3, \dots , are the **zeros** of the equation, while the roots of the denominator, $p_1, p_2, p_3 \dots$ are the **poles**. These are the same zeros and poles we encountered earlier in this chapter, and we will discuss how they are used in the next section.

Корни числителя, z_1, z_2, z_3, \dots , являются нулями уравнения, в то время как корни знаменателя, $p_1, p_2, p_3 \dots$ - **полюса**. Они - те же самые нули и полюса, с которыми мы столкнулись ранее в этой главе, и мы обсудим, как они используются в следующем разделе.

Factoring an s -domain expression is straightforward if the numerator and denominator are *second-order polynomials*, or less. In other words, we can easily handle the terms: s and s^2 , but not: s^3, s^4, s^5, \dots . This is because the roots of a second-order polynomial, $ax^2 + bx + c$, can be found by using the quadratic equation: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. With this method, the transfer function of the example notch filter is factored into:

Разложение на множители выражения s -домена прямое, если числитель и знаменатель – *многочлены второго порядка*, или меньше. Другими словами, мы можем легко обрабатывать термины: s и s^2 , но нет: s^3, s^4, s^5, \dots . Это - то, потому что корни полиномиального второго заказа, $ax^2 + bx + c$, могут быть найдены, используя квадратное уравнение: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. С этим методом, функция преобразования(передаточная функция?) типа фильтра-пробки примера разложена на множители в:

$$H(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

where:

$$\begin{aligned} z_1 &= j/\sqrt{LC} & p_1 &= \frac{-R + \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} \\ z_2 &= -j/\sqrt{LC} & p_2 &= \frac{-R - \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} \end{aligned}$$

As in this example, a second-order system has a maximum of two zeros and two poles. The number of poles in a system is equal to the number of independent energy storing components. For instance, inductors and capacitors store energy, while resistors do not. The number of zeros will be equal to, or less than, the number of poles.

Как в этом примере, система с вторым порядком имеет максимум двух нулей и двух полюсов. Число полюсов в системе равно номеру независимой энергии, сохраняющей компоненты. Например, катушки индуктивности и конденсаторы сохраняют энергию, в то время как резисторы делают нет. Число нулей будет равно, или меньше чем, число полюсов.

Polynomials greater than second order cannot generally be factored using algebra, requiring more complicated numerical methods. As an alternative, circuits can be constructed as a *cascade* of *second-order* stages. A good example is the family of analog filters presented in Chapter 3. For instance, an eight pole filter is designed by cascading four stages of two poles each. The important point is that this multistage approach is used to overcome limitations in the *mathematics*, not limitations in the *electronics*.

Многочлены больше чем второго порядка не могут вообще разлагаться на множители, используя алгебру, требуя более сложных численных методов. Как альтернатива, цепи могут быть созданы как каскад стадий с вторым порядком. Хороший пример - семейство аналоговых фильтров, представленных в главе 3. Например, восьми полюсный фильтр разработан, располагая каскадом четыре стадии двух полюсов каждый. Важный пункт - то, что этот многоступенчатый подход используется, чтобы преодолеть ограничения в математике, не ограничения в электронике.

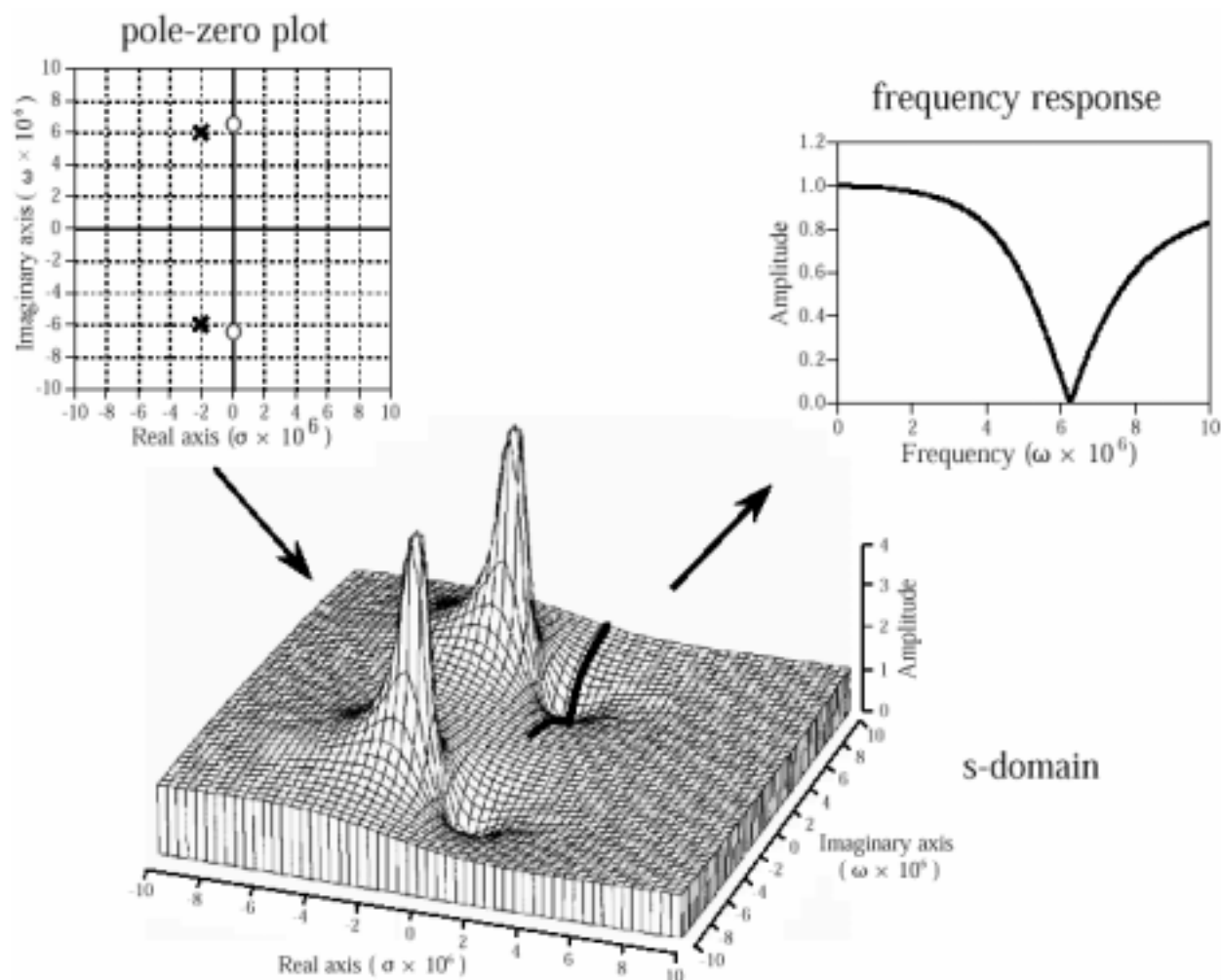


FIGURE 32-7

Poles and zeros in the s-domain. These illustrations show the relationship between the pole-zero plot, the s-domain, and the frequency response. The notch filter component values used in these graphs are: $R=220\Omega$, $C=470$ pF, and $L = 54$ μ H. These values place the center of the notch at $\omega = 6.277$ million, i.e., a frequency of approximately 1 MHz.

РИСУНОК 32-7

Полюса и нули в s-домене. Эти иллюстрации показывают отношения между графиком нуля полюса, s-доменом, и частотной характеристикой. Значения компонента фильтrf-пробки, используемые в этих диа-

граммах(графиках): $R=220\Omega$, $C=470\text{ pF}$, и $L = 54\text{ }\mu\text{H}$. Эти значения размещают центр выемки(ложбины) в $\omega = 6.277$ миллионов, то есть, частота приблизительно 1 МГц.

The Importance of Poles and Zeros

Важность Полюсов и Нулей

To make this less abstract, we will use actual component values for the notch filter we just analyzed: Plugging these $R = 220\Omega$, $L = 54\text{ }\mu\text{H}$, $C = 470\text{pF}$. values into the above equations, places the poles and zeros at:

Чтобы делать это меньшим количеством резюме, мы будем использовать фактические составляющие значения для фильтра-пробки, которую мы только анализировали: Подключение этих $R = 220\Omega$, $L = 54\text{ }\mu\text{H}$, $C = 470\text{pF}$ значений в вышеупомянутые уравнения, размещают полюса и нули в:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 + j 6.277 \times 10^6 & p_1 &= -2.037 \times 10^6 + j 5.937 \times 10^6 \\ z_2 &= 0 - j 6.277 \times 10^6 & p_2 &= -2.037 \times 10^6 - j 5.937 \times 10^6 \end{aligned}$$

These pole and zero locations are shown in Fig. 32-7. Each zero is represented by a circle, while each pole is represented by a cross. This is called a **pole-zero diagram**, and is the most common way that s-domain data are displayed. Figure 32-7 also shows a topographical display of the s-plane. For simplicity, only the magnitude is shown, but don't forget that there is a corresponding phase. Just as mountains and valleys determine the shape of the surface of the earth, the poles and zeros determine the shape of the s-plane. Unlike mountains and valleys, every pole and zero is exactly the same shape and size as every other pole and zero. The only unique characteristic a pole or zero has is its *location*. Poles and zeros are important because they provide a concise representation of the value at *any point in the s-plane*. That is, we can completely describe the characteristics of the system using only a *few parameters*. In the case of the *RLC* notch filter, we only need to specify four complex parameters to represent the system: (each consisting z_1, z_2, p_1, p_2 of a real and an imaginary part).

Эти расположения полюсов и нулей показываются в рис. 32-7. Каждый нуль представлен кругом, в то время как каждый полюс представлен пересечением. Это называется **диаграммой нуля-полюса**, и - наиболее обычный путь, которым данные s-домена отображены. Рисунок 32-7 также показывает топографический дисплей s-плоскости. Для простоты, только величина показывается, но не забывайте, что имеется соответствующая фаза. Так же, как возвышенности и низины определяют форму поверхности земли, полюса, и нули определяют форму s-плоскости. В отличие от возвышенностей и понижений, каждый полюс и нуль - точно та же самая форма и размер как каждый другой полюс и нуль. Единственная уникальная характеристика, которую полюс или нуль имеет - его *расположение*. Полюса и нули важны, потому что они обеспечивают краткое представление значения в *любой точке в s-плоскости*. То есть мы можем полностью описывать характеристики системы, используя только *несколько параметров*. В случае с *RLC* фильтром-пробкой, мы должны определить только четыре комплексных параметра, чтобы представить систему: (каждый состоящий z_1, z_2, p_1, p_2 из вещественной и мнимой части).

To better understand poles and zeros, imagine an ant crawling around the s-plane. At any particular location the ant happens to be (i.e., some value of s), there is a corresponding value of the transfer function, $H(s)$. This value is a complex number that can be expressed as the magnitude & phase, or as the real & imaginary parts. Now, let the ant carry us to one of the zeros in the s-plane. The value we measure for the real and imaginary parts will be *zero* at this location. This

can be understood by examining the mathematical equation for $H(s)$ in Eq. 32-3. If the location, s , is equal to any of the zeros, one of the terms in the numerator will be zero. This makes the entire expression equal to zero, regardless of the other values.

Чтобы лучше понимать полюса и нули, вообразите муравья, ползающего вокруг s -плоскости. В любом специфическом расположении муравей, случается, (то есть, некоторое значение s), имеется соответствующее значение функции преобразования типа, $H(s)$. Это значение - комплексное число, которое может быть выражено как величина и фаза, или как вещественная и мнимая части. Теперь, позвольте муравью нести нас к одному из нулей в s -плоскости. Значение, которое мы измеряем для вещественных и мнимых частей, будут нулевыми в этом расположении. Это может быть понято, исследуя математическое уравнение для $H(s)$ в уравнении 32-3. Если расположение, s , является равным любому из нулей, один из терминов в числителе будет нулевым. Это заставит полное выражение равняться, 0, независимо от других значений.

Next, our ant journey takes us to one of the poles, where we again measure the value of the real and imaginary parts of $H(s)$. The measured value becomes larger and larger as we come close to the exact location of the pole (hence the name). This can also be understood from Eq. 32-3. If the location, s , is equal to any of the $p' s$, the denominator will be equal to zero, and the division by zero makes the entire expression infinity large.

Затем, наша поездка муравья берет нас к одному из полюсов, где мы снова измеряем значение вещественных и мнимых частей $H(s)$. Измеренное значение становится большим и большим, поскольку мы прибываем близко к точному расположению полюса (отсюда название). Это может также быть понято от уравнения 32-3. Если расположение, s , является равным любому из $p' s$, знаменатель будет равен, 0, и деление на нуль делает полное выражение бесконечно большим.

Having explored the unique locations, our ant journey now moves randomly throughout the s -plane. The value $H(s)$ of at each location depends entirely on the positioning of the poles and the zeros, because there are *no* other types of features allowed in this strange terrain. If we are near a pole, the value will be large; if we are near a zero, the value will be small.

Исследовав уникальные расположения, наша поездка муравья теперь перемещается беспорядочно повсюду s -плоскости. Значение $H(s)$ в каждом расположении зависит полностью от позиционирования полюсов и нулей, потому что не имеется *никаких* других типов особенностей, позволенных в этом странном ландшафте. Если мы - около полюса, значение будет большое; если мы - около нуля, значение будет маленькое.

Equation 32-3 also describes how *multiple* poles and zeros interact to form the s -domain signal. Remember, subtracting two complex numbers provides the *distance* between them in the complex plane. For example, is the $(s - z_0)$ distance between the arbitrary location, s , and the zero located at z_0 . Therefore, Eq. 32-3 specifies that the value at each location, s , is equal to the distance to all of the zeros *multiplied*, divided by the distance to all of the poles *multiplied*.

Уравнение 32-3 также описывает, как многочисленные полюса и нули взаимодействуют, чтобы формировать сигнал s -домена. Помните, вычитание двух комплексных чисел обеспечивает *расстояние* между ними в комплексной плоскости. Например, $(s - z_0)$ расстояние между произвольным расположением, s , и нулем, расположенным в z_0 . Поэтому, уравнение 32-3 определяет, что значение в каждом расположении, s , является равным расстоянию к всем нулям, *умножил*, разделенным расстоянием к всем полюсам *умножил*.

This brings us to the heart of this chapter: how the location of the poles & zeros provides a deeper understanding of the system's *frequency response*. The frequency response is equal to the values of $H(s)$ along the imaginary axis, signified by the dark line in the topographical plot of Fig. 32-7. Imagine our ant starting at the origin and crawling along this path. Near the origin, the distance to the zeros is approximately equal to the distance to the poles. This makes the numerator and denominator in Eq. 32-3 cancel, providing a unity frequency response at low frequencies. The situation doesn't change significantly until the ant moves near the pole and zero location. When approaching the zero, the value $H(s)$ of drops suddenly, becoming *zero* when the ant is upon the *zero*. As the ant moves past the pole and zero pair, the value $H(s)$ of again returns to unity. Using this type of visualization, it can be seen that the width of the notch depends on the distance between the pole and zero.

Это приводит нас к основе(сердцу) этой главы: как расположение полюсов и нулей обеспечивает глубже понимание *частотной характеристики системы*. Частотная характеристика равна значениям $H(s)$ по мнимой оси, показанной темной строкой в топографическом графике рис. 32-7. Вообразите нашего муравья, начинающегося в начале координат и ползающий по этому пути. Около начала координат, расстояние к нулям приблизительно равно расстоянию к полюсам. Это делает числитель и знаменатель в уравнении 32-3 отмененной, обеспечивая частотную характеристику единицы в низких частотах. Положение(ситуация) не изменяется знаменательно до шагов муравья около полюса и обнуляет расположение. При приближении к нулю, значение $H(s)$ снижений внезапно(скачкообразно), становление нулем, когда муравей находится на нуль. Поскольку муравей перемещается мимо полюса и нулевой пары, значение $H(s)$ снова возвращений к единице. Используя этот тип визуализации, может быть замечено, что ширина бороздки(зубца; понижения) зависит от расстояния между полюсом и нулем.

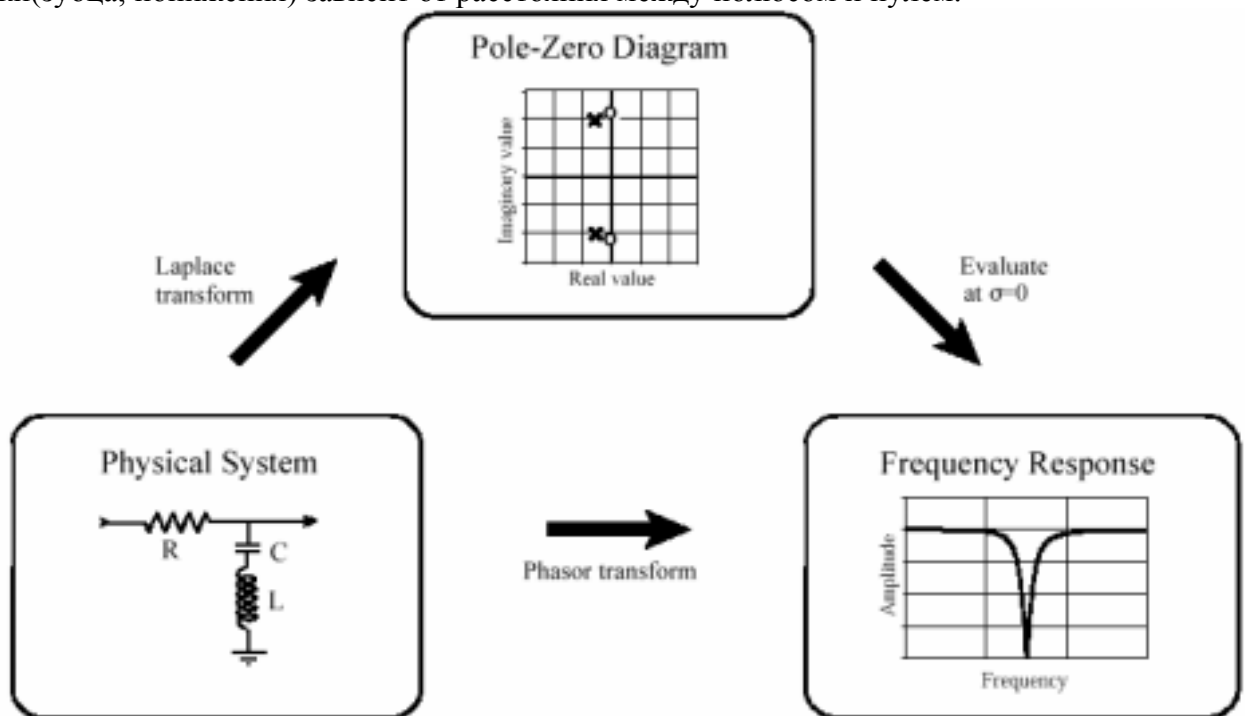


FIGURE 32-8

Strategy for using the Laplace transform. The phasor transform presented in Chapter 30 (the method using $R, j\omega L,$ & $-j/\omega C$) allows the frequency response to be directly calculated from the parameters of the physical system. In comparison, the Laplace transform calculates an s -domain representation from the physical system, usually displayed in the form of a pole-zero diagram. In turn, the frequency response can be obtained from the s -domain by evaluating the transfer function along the imaginary axis. While both methods provide the same end result, the intermediate step of the s -domain provides insight into why the frequency response behaves as it does.

РИСУНОК 32-8

Стратегия для использования преобразования Лапласа. Трансформанта phasor, представленная в главе 30 (метод, использующий R , $j\omega L$, & $-j/\omega C$) позволяет частотной характеристике быть непосредственно рассчитанной от параметров физической системы. для сравнения, преобразование Лапласа вычисляет представление s-домена от физической системы, обычно отображаемой в форме диаграммы нуля полюса. В свою очередь, частотная характеристика может быть получена от s-домена, оценивая функцию преобразования типа по мнимой оси. В то время как оба метода обеспечивают тот же самый конечный результат, промежуточный шаг s-домена обеспечивает проникновение в то, почему частотная характеристика ведет себя, как это делает.

Figure 32-8 summarizes how the Laplace transform is used. We start with a physical system, such as an electric circuit. If we desire, the phasor transform can directly provide the frequency response of the system, as described in Chapter 30. An alternative is to take the Laplace transform using the four step method previously outlined. This results in a mathematical expression for the transfer function, $H(s)$, which can be represented in a pole-zero diagram. The frequency response can then be found by evaluating the transfer function along the imaginary axis, that is, by replacing each s with $j\omega$. While both methods provide the same result, the intermediate pole-zero diagram provides an understanding of *why* the system behaves as it does, and how it can be changed.

Рисунок 32-8 суммирует, как преобразование Лапласа используется. Мы запускаем с физической системы, типа электрической цепи. Если мы желаем, трансформанта phasor может непосредственно обеспечивать частотную характеристику системы, как описано в главе 30. Альтернатива должна брать Лапласову трансформанту, используя метод четыре шагов, предварительно выделенных. Это приводит к математическому выражению для функции преобразования типа, $H(s)$, который может быть представлен в диаграмме нуля полюса. Частотная характеристика может тогда быть найдена, оценивая функцию преобразования типа по мнимой оси, то есть, заменяя каждый s с $j\omega$. В то время как оба метода обеспечивают тот же самый результат, промежуточная диаграмма нуля полюса обеспечивает понимание того, почему система ведет себя, как это делает, и как это может быть изменено.

Filter Design in the s-Domain

Проект Фильтра в s-домене

The most powerful application of the Laplace transform is the design of systems *directly* in the s-domain. This involves two steps: First, the s-domain is designed by specifying the number and location of the poles and zeros. This is a pure mathematical problem, with the goal of obtaining the best frequency response. In the second step, an electronic circuit is derived that provides this s-domain representation. This is something of an art, since there are many circuit configurations that have a given pole-zero diagram.

Наиболее мощное приложение преобразования Лапласа - проект систем *непосредственно* в s-домене. Это включает в себя два шага: Во первых, s-домен разработан, определяя число и расположение полюсов и нулей. Это - чисто математическая проблема, с целью получения лучшей частотной характеристики. Во втором шаге, электронная схема получена, что обеспечивает это представление s-домена. Это - кое-что искусства, с тех пор имеются много конфигураций схемы, которые имеют данную диаграмму нуля-полюса.

As previously mentioned, *step 4* of the Laplace transform method is very difficult if the system contains more than two poles or two zeros. A common solution is to implement multiple poles and zeros in *successive stages*. For example, a 6 pole filter is implemented as three successive stages, with each stage containing up to two poles and two zeros. Since each of these stages can

be represented in the s-domain by a quadratic numerator divided by a quadratic denominator, this approach is called designing with **biquads**.

Как предварительно упомянуто, шаг 4 метода преобразования Лапласа очень труден, если система содержит больше чем два полюса или два нуля. Обычное решение состоит в том, чтобы осуществить многочисленные полюса и нули в *последовательных стадиях*. Например, 6 полюсов фильтра осуществлены как три последовательных стадии, с каждой стадией, содержащей до двух полюсов и двух нулей. Так как каждая из этих стадий может быть представлена в s-домене квадратным числителем, разделенным квадратным знаменателем, этот подход называется, разработкой с **биквадратами**.

Figure 32-9 shows a common biquad circuit, the one used in the filter design method of Chapter 3. This is called the **Sallen-Key** circuit, after R.P. Sallen and E.L. Key, authors of a paper that described this technique in the mid 1950s. While there are several variations, the most common circuit uses two resistors of equal value, two capacitors of equal value, and an amplifier with an amplification of between 1 and 3. Although not available to Sallen and Key, the amplifiers can now be made with low-cost op amps with appropriate feedback resistors. Going through the four step circuit analysis procedure, the location of this circuit's two poles can be related to the component values:

Рисунок 32-9 показывает обычную biquad(биквадратную?) схему, тот, используемый в фильтре проектирует метод главы 3. Это называется **Sallen-Key** схемой, после R.P. Sallen and E.L. Key, авторы бумаги, которая описала эту методику в середине 1950-ых. В то время как имеются несколько вариаций, наиболее общая схема использует два резистора равного значения, два конденсатора равного значения, и усилителя с усилением между 1 и 3. Хотя не доступные Sallen и Key усилители, могут теперь быть сделаны с дешевыми операционными усилителями с соответствующими резисторами обратной связи. Проходя четыре процедуры схемного анализа шага, расположение двух полюсов этой схемы может быть связано с составляющими значениями:

EQUATION 32-4

Sallen-Key pole locations. These equations relate the pole position, ω and σ , to the amplifier gain, A , the resistor, R , and capacitor, C .

$$\sigma = \frac{A-3}{2RC}$$

УРАВНЕНИЕ 32-4

Расположение полюсов Sallen-Key. Эти уравнения связывают позицию полюса, ω и σ , к усилению усилителя, A , резистору, R , и конденсатору, C .

$$\omega = \frac{\pm\sqrt{-A^2 + 6A - 5}}{2RC}$$

These equations show that the two poles always lie somewhere on a circle of radius: $1/RC$. The exact position along the circle depends on the gain of the amplifier. As shown in (a), an amplification of 1 places both of the poles on the real axis. The frequency response of this configuration is a low-pass filter with a relatively smooth transition between the passband and stopband. The -3dB (0.707) cutoff frequency of this circuit, denoted by ω_0 , is where the circle intersects the imaginary axis, i.e., $\omega_0 = 1/RC$.

Эти уравнения показывают, что эти два полюса всегда лежат где-нибудь на круге радиуса: $1/RC$. Точная позиция по кругу зависит от усиления усилителя. Как показано в (a), усиление 1 размещает оба из полюсов на действительной оси. Частотная характеристика этой конфигурации - фильтр нижних частот с относительно гладким перемещением между полосой пропускания и полосой задерживания. -3dB (0.707) частоты отсечки этой схемы, обозначенной ω_0 , - то, где круг пересекает мнимую ось, то есть, $\omega_0 = 1/RC$.

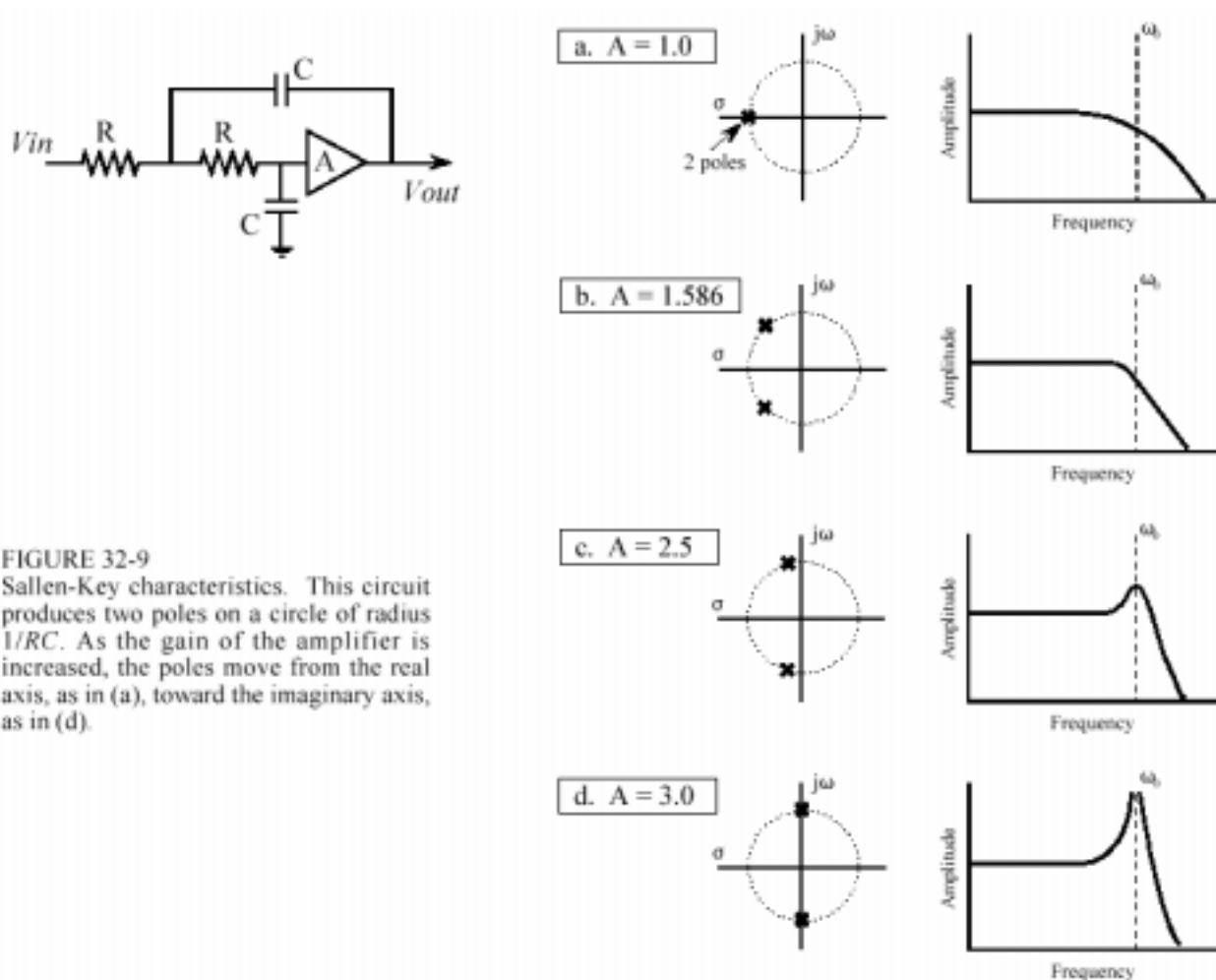


FIGURE 32-9
Sallen-Key characteristics. This circuit produces two poles on a circle of radius $1/RC$. As the gain of the amplifier is increased, the poles move from the real axis, as in (a), toward the imaginary axis, as in (d).

FIGURE 32-9
Sallen-Key characteristics. This circuit produces two poles on a circle of radius $1/RC$. As the gain of the amplifier is increased, the poles move from the real axis, as in (a), toward the imaginary axis, as in (d).

РИСУНОК 32-9

Характеристики Sallen-Кея. Эта схема производит два полюса на круге радиуса $1/RC$. Поскольку усиление усилителя увеличивается, полюса двигаются от действительной оси, как в (a), к мнимой оси, как в (d).

As the amplification is increased, the poles move along the circle, with a corresponding change in the frequency response. As shown in (b), an amplification of 1.586 places the poles at 45 degree angles, resulting in the frequency response having a sharper transition. Increasing the amplification further moves the poles even closer to the imaginary axis, resulting in the frequency response showing a peaked curve. This condition is illustrated in (c), where the amplification is set at 2.5. The amplitude of the peak continues to grow as the amplification is increased, until a gain of 3 is reached. As shown in (d), this is a special case that places the poles directly on the imaginary axis. The corresponding frequency response now has an infinity large value at the peak. In practical terms, this means the circuit has turned into an oscillator. Increasing the gain further

pushes the poles deeper into the right half of the s -plane. As mentioned before, this correspond to the system being unstable (spontaneous oscillation).

Поскольку усиление увеличено, перемещение полюсов по кругу, с соответствующим изменением в частотной характеристике. Как показано в (b), усиление 1.586 мест полюса под углами 45 градусов, приводя к частотной характеристике, имеющей более острое перемещение. Увеличение усиления дальнейшие шаги полюса даже ближе к мнимой оси, приводя к частотному ответу, показывая достигнутую максимумом кривую. Это состояние иллюстрировано в (c), где усиление установлено в 2.5. Амплитуда пика продолжает расти, поскольку усиление увеличено, пока усиление 3 не достигнуто. Как показано в (d), это - частный случай, который размещает полюса непосредственно в мнимую ось. Соответствующая частотная характеристика теперь имеет бесконечность большое значение в пике. В практических терминах, это означает, что схема превратилась в генератор. Увеличение усиления далее помещает полюса глубже в правую половину s -плоскости. Как упомянуто прежде, это соответствует системе, являющейся непостоянной(нестабильной) (непосредственное колебание).

Using the Sallen-Key circuit as a building block, a wide variety of filter types can be constructed. For example, a low-pass **Butterworth filter** is designed by placing a selected number of poles evenly around the left-half of the circle, as shown in Fig. 32-10. Each two poles in this configuration requires one Sallen-Key stage. As described in Chapter 3, the Butterworth filter is maximally flat, that is, it has the sharpest transition between the passband and stopband *without peaking* in the frequency response. The more poles used, the faster the transition. Since all the poles in the Butterworth filter lie on the same circle, all the cascaded stages use the same values for R and C . The only thing different between the stages is the amplification. Why does this circular pattern of poles provide the optimally flat response? Don't look for an obvious or intuitive answer to this question; it just falls out of the mathematics.

Используя Sallen-Key схему как стандартный блок, широкое разнообразие типов фильтра может быть создано. Например, **фильтр Буттерворта** с низким проходом разработан, помещая отобранное число полюсов равномерно вокруг левой - половины круга, как показано в рис. 32-10. Каждые два полюса в этой конфигурации требуют одной Sallen-Key стадии. Как описано в главе 3, фильтр Буттерворта максимально плоский, то есть это имеет самое острое перемещение между полосой пропускания и полосой задерживания *без появления пиков* в частотной характеристике. Чем большее количество используемых полюсов, тем быстрее перемещение. Начиная с всех полюсов в фильтре Буттерворта лежат на том же самом круге, все каскадные стадии используют те же самые значения для R и C . Единственная вещь, отличная между стадиями - усиление. Почему этот кольцевой образец полюсов, обеспечивают оптимально плоский ответ? Не ищите очевидный или интуитивный ответ на этот вопрос; это только выпадает математики.

Figure 32-11 shows how the pole positions of the Butterworth filter can be modified to produce the **Chebyshev filter**. As discussed in Chapter 3, the Chebyshev filter achieves a sharper transition than the Butterworth at the expense of ripple being allowed into the passband. In the s -domain, this corresponds to the circle of poles being flattened into an *ellipse*. The more flattened the ellipse, the more ripple in the passband, and the sharper the transition. When formed from a cascade of Sallen-Key stages, this requires different values of resistors and capacitors in each stage.

Рисунок 32-11 показов, как позиции полюса фильтра Буттерворта могут изменяться, чтобы произвести **Чебышевский фильтр**. Как обсуждено в главе 3, Чебышевский фильтр достигает более острого перемещения чем Буттерворт за счет ряби, позволяемой в полосе (с) АВТЭКС, Санкт-Петербург, <http://www.autex.spb.ru>, e-mail: info@autex.spb.ru

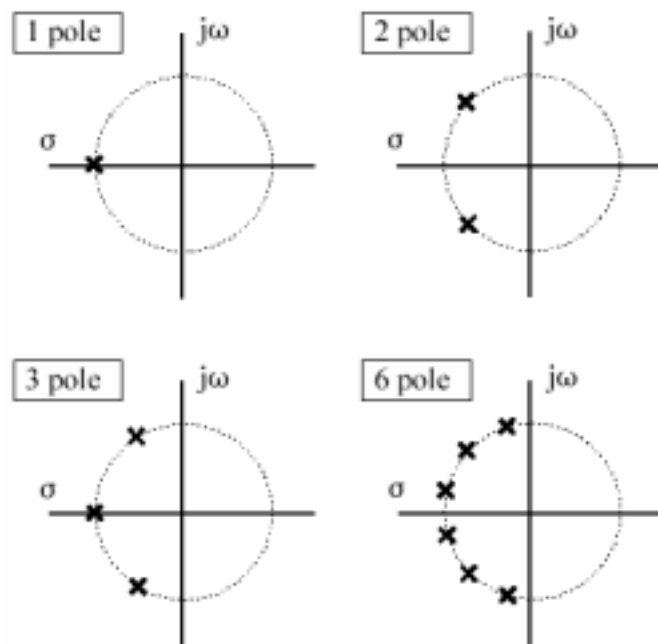
пропускания. В s-домене, это соответствует кругу полюсов, сглаживаемых в эллипс. Чем более сглаженный эллипс, тем большее количество ряби в полосе пропускания, и более острое перемещение. Когда сформировано из каскадов Sallen-Key стадий, это требует различных значений резисторов и конденсаторов в каждой стадии.

Figure 32-11 also shows the next level of sophistication in filter design strategy: the **elliptic filter**. The elliptic filter achieves the sharpest possible transition by allowing ripple in both the passband and the stopband. In the s-domain, this corresponds to placing zeros directly on the real axis, with the first one near the cutoff frequency. Elliptic filters come in several varieties and are significantly more difficult to design than Butterworth and Chebyshev configurations. This is because the poles and zeros of the elliptic filter do not lie in a simple geometric pattern, but in a mathematical arrangement involving elliptic functions and integrals (hence the name).

Рисунок 32-11 также показывает следующий уровень сложности(изощренности) в фильтре проектирует стратегию: эллиптический фильтр. Эллиптический фильтр достигает самого острого возможного перемещения, позволяя рябь, и в полосе пропускания и полосе задерживания. В s-домене, это соответствует размещению нулей непосредственно на действительной оси, с первым около частоты отсечки. Эллиптические фильтры входят в несколько множеств и знаменательно более трудны проектировать чем Буттерворт и Чебышевские конфигурации. Это - то, потому что полюса и нули эллиптического фильтра не лежат в простом геометрическом образце, но в математическом расположении, включающем эллиптические функции и интегралы (отсюда название).

FIGURE 32-10
The Butterworth s-plane. The low-pass Butterworth filter is created by placing poles equally around the left-half of a circle. The more poles used in the filter, the faster the roll-off.

РИСУНОК 32-10
S-плоскость Буттерворта. Фильтр Буттерворта с низким проходом создан, помещая полюса одинаково вокруг левой - половины круга. Чем большее количество полюсов, используемых в фильтре, тем быстрее завал(спад).



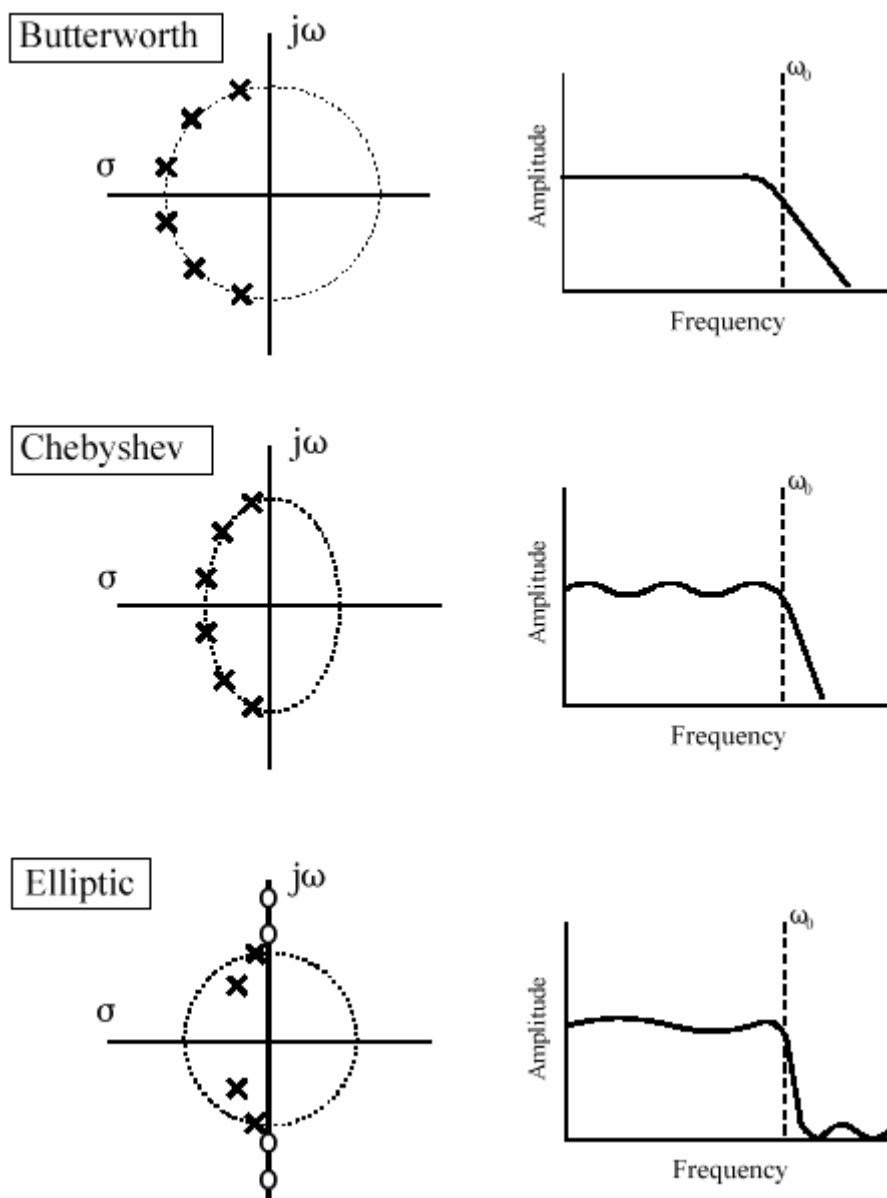


FIGURE 32-11

Classic pole-zero patterns. These are the three classic pole-zero patterns in filter design. Butterworth filters have poles equally spaced around a circle, resulting in a maximally flat response. Chebyshev filters have poles placed on an ellipse, providing a sharper transition, but at the cost of ripple in the passband. Elliptic filters add zeros to the stopband. This results in a faster transition, but with ripple in the passband *and* stopband.

РИСУНОК 32-11

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО ПО ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

Классические образцы нуля-полюса. Они - три классических образца нуля-полюса в проекте фильтра. Фильтры Буттерворта располагают полюса одинаково вокруг круга, приводя к максимально плоскому ответу. Чебышевские фильтры помещают полюса на эллипсе, обеспечивая более острое перемещение, но ценой ряби в полосе пропускания. Эллиптические фильтры прибавляют нули к полосе задерживания. Это приводит к более быстрому перемещению, но с рябью в полосе пропускания и полосе задерживания.

Since each biquad produces two poles, **even order filters** (2 pole, 4 pole, 6 pole, etc.) can be constructed by cascading biquad stages. However, **odd order filters** (1 pole, 3 pole, 5 pole, etc.) require something that the biquad cannot provide: a single pole on the imaginary axis. This turns out to be nothing more than a simple RC circuit added to the cascade. For example, a 9 pole filter can be constructed from 5 stages: 4 Sallen-Key biquads, plus one stage consisting of a single capacitor and resistor.

Так как каждый biquad производит два полюса, **даже порядок фильтров** (2 полюс, 4 полюс, 6 полюс, и т.д.) может быть создан, располагая каскадом biquad стадии. Однако, **нечетные фильтры порядка** (1 полюс, 3 полюс, 5 полюс, и т.д.) требуют кое-чего, что biquad не может обеспечивать: однополюсный на мнимой оси. Это, оказывается, не ничто, больше чем простая RC схема добавлялись к каскаду. Например, 9 фильтра полюса может быть создан из 5 стадий: 4 Sallen-Key biquads, плюс одна стадия, состоящая из единственного конденсатора и резистора.

These classic pole-zero patterns are for low-pass filters; however, they can be modified for other frequency responses. This is done by designing a low-pass filter, and then performing a mathematical transformation in the s-domain. We start by calculating the low-pass filter pole locations, and then writing the transfer function, $H(s)$, in the form of Eq. 32-3. The transfer function $H(s)$ of the corresponding high-pass filter is found by replacing each "s" with "1/s", and then rearranging the expression to again be in the pole-zero form of Eq. 32-3. This defines new pole and zero locations that implement the high-pass filter. More complicated s-domain transforms can create band-pass and band-reject filters from an initial low-pass design. This type of mathematical manipulation in the s-domain is the central theme of filter design, and entire books are devoted to the subject. Analog filter design is 90% *mathematics*, and only 10% *electronics*.

Эти классические образцы нуля-полюса - для фильтров нижних частот; однако, они могут изменяться для других частотных характеристик. Это сделано, разрабатывая фильтр нижних частот, и затем выполняя математическое преобразование в s-домене. Мы запускаем, вычисляя расположения полюса фильтра нижних частот, и затем записывая функцию преобразования типа, $H(s)$, в форме уравнения 32-3. Функция преобразования (передаточная функция) $H(s)$ соответствующий фильтр верхних частот найдена, заменяя каждый "s" с "1/s", и затем перестраивая выражение, чтобы снова быть в форме нуля полюса уравнения 32-3. Это определяет новый полюс и нулевые расположения, которые осуществляют фильтр верхних частот. Более сложные трансформанты s-домена могут создавать полосовые и полосовые(заграждающие) фильтры от начального проекта низкий проход. Этот тип математической манипуляции в s-домене - центральная тема проекта фильтра, и полные книги посвящены предмету. Аналоговый проект фильтра - математика 90 %, и только электроника 10 %.

Fortunately, the design of high-pass filters using Sallen-Key stages doesn't require this mathematical manipulation. The "1/s" for "s" replacement in the s-domain corresponds to swapping the resistors and capacitors in the circuit. In the s-plane, this swap places the poles at a new position, and adds two zeros directly at the origin. This results in the frequency response having a value of zero at DC (zero frequency), just as you would expect for a high-pass filter. This brings the Sallen-Key circuit to its full potential: the implementation of two poles *and* two zeros.

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО ПО ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

К счастью, проект фильтров верхних частот, использующих Sallen-Key стадии не требует этого математического преобразования. " $1/s$ " для " s " замены в s -домене соответствует подкачке резисторов и конденсаторов в схеме. В s -плоскости, эта перестановка размещает полюса в новую позицию, и прибавляет два нуля непосредственно в начале координат. Это приводит к частотной характеристике, имеющей значение нуля в постоянном токе (частота 0), также, как Вы ожидали бы для фильтра верхних частот. Это приносит Sallen-Key схему к ее полному потенциалу: выполнение двух полюсов и двух нулей.